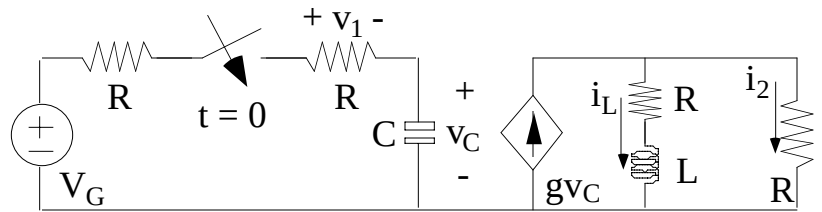


PROBLEMA 1



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua y son datos las características de todos los elementos, ha permanecido mucho tiempo sin cambios antes del cierre del interruptor; una vez producido éste, el circuito ya no experimenta más cambios. Hallad:

- 1 (1.2 puntos)** v_1 , v_C , i_L e i_2 en los instantes $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.
 - 2 (0.8 puntos)** Las ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución de v_C e i_L para $t \geq 0$.
 - 3 (0.5 puntos)** La variación de energía en la fuente independiente entre $t = 0$ y $t = \infty$.
-

A lo largo del problema utilizamos la siguiente nomenclatura:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}, v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

1 Para $t < 0$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A} \rightarrow v_1(0^-) = Ri_C(0^-) = 0 \text{ V}, v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V} \rightarrow i_L(0^-) = i_2(0^-) = \frac{g v_C(0^-)}{2} = 0 \text{ A}$$

La corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden cambiar bruscamente. Por tanto,

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V}, i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = \frac{V_G - v_C(0^+)}{R + R} = \frac{V_G}{2R} \rightarrow v_1(0^+) = Ri_C(0^+) = \frac{V_G}{2}$$

$$i_2(0^+) = g v_C(0^+) - i_L(0^+) = 0 \text{ A}$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto. Por tanto,

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A} \rightarrow v_1(\infty) = Ri_C(\infty) = 0 \text{ V}, v_C(\infty) = V_G$$

$$v_L(\infty) = 0 \text{ V} \rightarrow i_L(\infty) = i_2(\infty) = \frac{g v_C(\infty)}{2} = \frac{g V_G}{2}$$

2 Para $t > 0$ en la malla que contiene la fuente independiente se verifica

$$V_G = (R + R)i_C + v_C = 2RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad (1)$$

y en la malla que contiene la fuente dependiente se verifica

$$g v_C = i_L + i_2 = i_L + \frac{Ri_L + L \frac{di_L}{dt}}{R} = 2i_L + \frac{L di_L}{R dt} \quad (2)$$

Despejando v_C de (2) y sustituyendo el resultado en (1) se obtiene

$$2LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(4RC + \frac{L}{R}\right) \frac{di_L}{dt} + 2i_L = gV_G \quad (3)$$

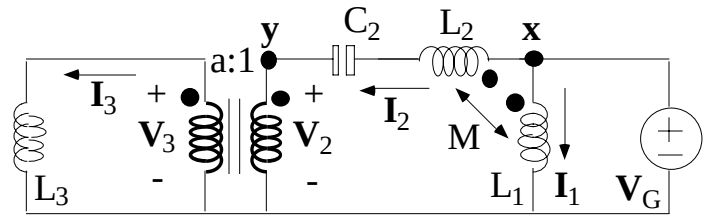
(1) y (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

3 Para calcular la energía buscada aplicamos el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} w_G &= \int_0^\infty p_G(t) dt = \int_0^\infty -V_G i_C(t) dt = \int_0^\infty -V_G C \frac{dv_C(t)}{dt} dt = \\ &= -V_G C [v_C(\infty) - v_C(0)] = -V_G^2 C \end{aligned}$$

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



1 (1 punto) Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones que permita obtener los valores de I_1 , I_2 , I_3 , V_2 y V_3 a partir de las características de los elementos del circuito. **Nota:** I_1 , I_2 e I_3 son corrientes de rama.

Utilizando los valores $V_G = j5$ V, $\omega = 100$ krad/s, $L_1 = 40$ μ H, $L_2 = 20$ μ H, $L_3 = 160$ μ H, $M = 10$ μ H, $C_2 = 5$ μ F y $a = 2$,

2 (0.7 puntos) Obtened la expresión temporal de la potencia en la fuente.

3 (0.8 puntos) Calculad el equivalente de Thèvenin entre los puntos **x** e **y**. ¿Qué impedancia hay que colocar entre esos dos puntos para que en ella se disipe la máxima potencia media posible?

1 En la rama de L_1 ,

$$V_G = I_1 j\omega L_1 + I_2 j\omega M \quad (1)$$

Por mallas,

$$V_G = I_1 j\omega M + I_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + V_2, \quad V_3 = I_3 j\omega L_3$$

Por las propiedades del transformador ideal,

$$V_3 = aV_2, \quad I_2 = aI_3$$

2 Reflejando impedancias en el transformador ideal,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 j\omega M + \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{j\omega L_3}{a^2} \right)$$

Sustituyendo los datos numéricos en esta ecuación y en (1),

$$\mathbf{I}_1 = 1 \text{ A} = \mathbf{I}_2 \rightarrow \mathbf{I}_G = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 2 \text{ A} \rightarrow$$

$$\rightarrow i_G(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}_G e^{j\omega t}\} = 2\cos(\omega t) \text{ A } (\omega = 10^5 \text{ rad/s})$$

$$\mathbf{V}_G = j5 \text{ V} \rightarrow v_G(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}_G e^{j\omega t}\} = 5\cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V } (\omega = 10^5 \text{ rad/s})$$

$$p_G(t) = -v_G(t)i_G(t) = -10\cos(\omega t)\cos(\omega t + 90^\circ) \text{ W } (\omega = 10^5 \text{ rad/s})$$

También,

$$S_G = -\frac{\mathbf{V}_G \mathbf{I}_G^*}{2} = -j5 \text{ VA} \rightarrow P_G = \text{Re}\{S_G\} = 0 \text{ W}, Q_G = \text{Im}\{S_G\} = -5 \text{ VAR} \rightarrow$$

$$\rightarrow p_G(t) = P_G + P_G \cos(2\omega t) - Q_G \sin(2\omega t) = 5\sin(2\omega t) \text{ W } (\omega = 10^5 \text{ rad/s})$$

3 Cuando **x** e **y** están en circuito abierto la situación es la de la figura. En consecuencia, utilizando los valores del apartado anterior,

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \mathbf{I}_1 j\omega M = j \text{ V}$$

Al conectar un cortocircuito entre **x** e **y** circula por él una corriente $\mathbf{I}_N$ (positiva hacia **y**), mientras que por el primario del transformador ideal lo hace una corriente

$$\mathbf{I}_P = \frac{\mathbf{V}_2}{\frac{j\omega L_3}{a^2}} = \frac{\mathbf{V}_G}{\frac{j\omega L_3}{a^2}} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

Además,

$$\begin{cases} \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 j\omega L_1 + \mathbf{I}_2 j\omega M \\ 0 = \mathbf{V}_{xy} = \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) + \mathbf{I}_1 j\omega M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{I}_1 = 0 \text{ A} \\ \mathbf{I}_2 = 5 \text{ A} \end{cases} \rightarrow \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_P - \mathbf{I}_2 = -\frac{15}{4} \text{ A}$$

con lo que

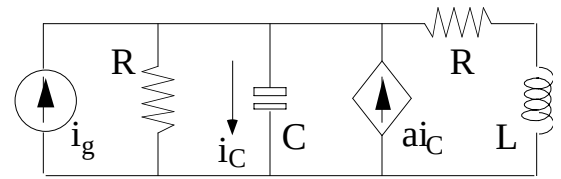
$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = -j\frac{4}{15} \Omega$$

La impedancia a colocar entre **x** e **y** para obtener la máxima potencia media es

$$Z_L = Z_{Th}^* = j\frac{4}{15} \Omega$$

PROBLEMA 3

En el circuito de la figura son datos los valores de R , L , C y a .



Sabiendo que $i_g(t) = I_G \cos(\omega t)$, y siendo I_G dato,

1 (0.5 puntos) Hallad el valor de la impedancia que **ve** la fuente independiente para un valor de ω dado.

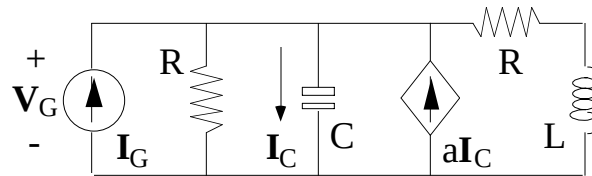
2 (0.5 puntos) Hallad los valores a los que tienden el módulo y la fase de la tensión en la fuente dependiente cuando ω tiende a 0 rad/s y cuando ω tiende a ∞ rad/s (supóngase $a < 1$).

3 (0.75 puntos) Hallad el valor (ω_0) de la frecuencia angular (distinto de 0 rad/s) para el que la impedancia que **ve** la fuente independiente es puramente resistiva. ¿Qué condición han de cumplir los parámetros R , L , C y a para que exista dicha frecuencia angular?

4 (0.5 puntos) Suponiendo que $C = \infty$ F, hallad $i_C(t)$.

5 (0.75 puntos) Sabiendo que $i_g(t) = I_D + I_G \cos(\omega_0 t)$, siendo I_D e I_G datos, teniendo ω_0 el valor calculado en el apartado 3, y teniendo C un valor finito, hallad la potencia en bornas de la capacidad.

1 Dado que el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, utilizamos la nomenclatura mostrada en la figura adjunta, con $I_G = I_G$.



$$I_G + a I_C = \frac{V_G}{R} + I_C + \frac{V_G}{R + j\omega L}, \quad I_C = V_G j\omega C \rightarrow I_G = V_G Y = \frac{V_G}{Z} \quad (1)$$

$$Y = \frac{1}{R} + j(1 - a)\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}, \quad Z = \frac{1}{Y}$$

2 La tensión en la fuente dependiente coincide con la tensión en la fuente independiente ya que ambos elementos están en paralelo; es decir, la tensión buscada es V_G .

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow \frac{2}{R} \Rightarrow V_G = \frac{I_G}{Y} \rightarrow \frac{I_G R}{2}$$

(módulo de $V_G \rightarrow \frac{I_G R}{2}$, fase de $V_G \rightarrow 0^\circ$)

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow Y \rightarrow j(1 - a)\omega C \Rightarrow V_G = \frac{I_G}{Y} \rightarrow -j \frac{I_G}{(1 - a)\omega C}$$

(módulo de $V_G \rightarrow \frac{I_G}{(1 - a)\omega C}$, fase de $V_G \rightarrow -90^\circ$)

3 Para hallar el valor pedido efectuamos el siguiente razonamiento:

$$Z \text{ resistiva} \rightarrow \text{Im}\{Y\} = 0 \rightarrow (1 - a)\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_0 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ rad/s (no vale, por el enunciado)} \\ + \sqrt{\frac{L - (1 - a)R^2 C}{(1 - a)L^2 C}} \end{array} \right\}$$

Para que exista ω_0 el radical de la última expresión ha de ser > 0 .

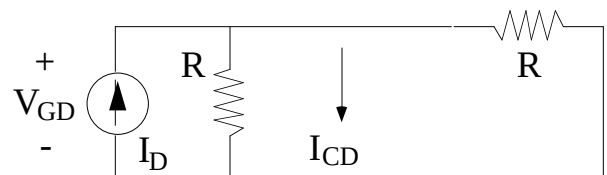
4 Sustituyendo la condición $C = \infty$ en (1) se obtiene

$$V_G = 0 \text{ V}, \mathbf{I}_G + a\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_C \rightarrow \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{I}_G}{1 - a} \rightarrow i_C(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}_C e^{j\omega t}\} = I_G \cos(\omega t)$$

5 Dado que hay dos excitaciones diferentes debemos aplicar el principio de superposición.

Continua

La inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto.



$$I_{CD} = 0 \text{ A}, V_{GD} = I_D(R//R) = \frac{I_D R}{2}$$

Régimen sinusoidal permanente

Utilizamos el circuito considerado en el primer apartado.

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R} + \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} \text{ (real)}$$

$$V_G = \frac{\mathbf{I}_G}{Y(\omega_0)} \rightarrow v_{GA}(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}_G e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G}{Y(\omega_0)} \cos(\omega_0 t)$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{V}_G j\omega_0 C = \frac{j\mathbf{I}_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)} \rightarrow i_{CA}(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}_C e^{j\omega_0 t}\} = \frac{I_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)} \cos(\omega_0 t + 90^\circ)$$

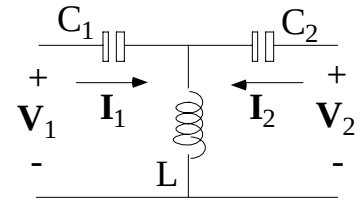
Respuesta total

$$i_C(t) = I_{CD} + i_{CA}(t), v_C(t) = V_{GD} + v_{GA}(t)$$

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) = \left[\frac{I_D R}{2} + \frac{I_G}{Y(\omega_0)} \cos(\omega_0 t) \right] \frac{I_G \omega_0 C}{Y(\omega_0)} \cos(\omega_0 t + 90^\circ)$$

PROBLEMA 4

El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



1 (0.5 puntos) ¿Qué condiciones han de cumplirse para que sea simétrico?

2 (1 punto) Se conectan en cascada dos cuadripolos como el del apartado 1. Obtén los parámetros de transmisión del cuadripolo resultante. Supóngase $C_1 = C = C_2$ y $\omega L = 1/(\omega C)$.

3 (0.5 puntos) El cuadripolo resultante de la agrupación indicada en el apartado 2 se inserta entre una fuente de tensión (caracterizada por el fasor V_G ; lleva asociada una impedancia en serie Z_G) y una impedancia Z_L . Obtén la impedancia de entrada ($Z_i = V_1/I_1$) del cuadripolo.

1 En el cuadripolo se tienen las siguientes ecuaciones de mallas:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L \right) + \mathbf{I}_2 j\omega L, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega L + \mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L \right) \quad (1)$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros z ,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \quad (2)$$

se tiene

$$z_{11} = \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L, \quad z_{12} = j\omega L = z_{21}, \quad z_{22} = \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L \quad (3)$$

Para que el cuadripolo sea simétrico han de cumplirse las condiciones

$$z_{12} = z_{21}, \text{ se cumple siempre; } z_{11} = z_{22} \rightarrow C_1 = C_2$$

2 Manipulando las ecuaciones (2) se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{z_{21}} - \frac{\mathbf{I}_2 z_{22}}{z_{21}}, \quad \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2 z_{11}}{z_{21}} - \frac{\mathbf{I}_2 (z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21})}{z_{21}} \quad (4)$$

Comparando estas ecuaciones con las correspondientes a la definición de los parámetros de transmisión,

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 - b\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_1 = c\mathbf{V}_2 - d\mathbf{I}_2 \quad (5)$$

se tiene

$$a = \frac{z_{11}}{z_{21}}, \quad b = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}{z_{21}}, \quad c = \frac{1}{z_{21}}, \quad d = \frac{z_{22}}{z_{21}}$$

Sustituyendo en estas expresiones los datos del enunciado se obtiene

$$z_{11} = 0 \, \Omega = z_{22}, \quad z_{12} = j\omega L = z_{21} \rightarrow a = 0 = d, \quad b = -j\omega L, \quad c = \frac{1}{j\omega L}$$

En la agrupación en cascada los parámetros de transmisión del cuadripolo resultante se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3 El circuito resultante queda caracterizado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L; \quad \mathbf{V}_1 = A\mathbf{V}_2 - B\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_1 = C\mathbf{V}_2 - D\mathbf{I}_2$$

A partir de ellas, y teniendo en cuenta (6), es inmediato deducir que

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 Z_L \rightarrow -\mathbf{V}_1 = -\mathbf{I}_1 Z_L \rightarrow Z_i = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = Z_L$$