

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

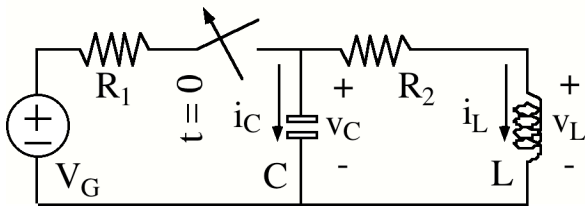
Examen de Análisis de circuitos (primer curso)
Diciembre 2008

Preparado por:

Enrique Sánchez

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
UNIVERSIDAD DE VIGO

Problema 1 (2 puntos)



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, no experimenta más alteraciones después del cambio de posición del interruptor.

Apartado A (1.2 puntos). Obtened los valores de v_C , i_C , v_L e i_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Apartado B (0.8 puntos). Obtened el coeficiente de amortiguamiento (ζ) y la frecuencia angular de resonancia (ω_0) del circuito. Para $R_2 = 1/(\omega_0 C)$, ¿cómo es su respuesta?

Apartado A.

Para $t = 0^-$ se tiene

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}, v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

ya que el circuito está en régimen permanente continuo, en el que la capacidad y la inductancia se comportan como un circuito abierto y un cortocircuito, respectivamente.

Además, por mallas se tiene

$$V_G = R_1(i_L(0^-) + i_C(0^-)) + R_2 i_L(0^-) + v_L(0^-) \quad i_L(0^-) = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

$$v_C(0^-) = R_2 i_L(0^-) + v_L(0^-) = \frac{R_2 V_G}{R_1 + R_2}$$

Para $t = 0^+$, dada la continuidad de las magnitudes fundamentales de la inductancia y la capacidad, se tiene

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R_2 V_G}{R_1 + R_2}, i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R_1 + R_2}$$

Además, por mallas se tiene

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -\frac{V_G}{R_1 + R_2}, v_L(0^+) = v_C(0^+) - R_2 i_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

Para $t = \infty$ se tiene

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}, v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

ya que el circuito está en régimen permanente continuo, en el que la capacidad y la inductancia se comportan como un circuito abierto y un cortocircuito, respectivamente. Además, por mallas se tiene

$$i_L(\infty) = -i_C(\infty) = 0 \text{ A}, v_C(\infty) = v_L(0^+) + R_2 i_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

Apartado B.

Para $0 < t < \infty$ en el circuito se cumple

$$\text{Malla} \quad i_C = -i_L \quad (1)$$

$$\text{Malla} \quad v_C = R_2 i_L + v_L \quad (2)$$

$$\text{Relaciones funcionales} \quad i_C = C dv_C/dt, v_L = L di_L/dt \quad (3)$$

Despejando i_C de (1), sustituyendo el resultado en (2) y utilizando (3), se obtiene

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_2 C \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

Para v_C se obtiene una ecuación similar. Dadas las definiciones de ecuación característica, coeficiente de amortiguamiento y frecuencia angular de resonancia, se llega a

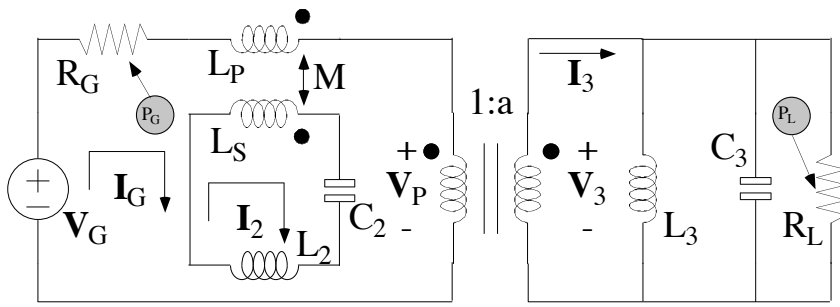
$$a = LC, b = R_2 C, c = 1$$

$$\zeta = \frac{b}{2a} = \frac{R_2}{2L}, \zeta_0 = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Utilizando las dos últimas expresiones y el valor de R_2 indicado en el enunciado, se tiene

$$\zeta = \frac{R_2}{2L} = \frac{1}{2\zeta_0 LC} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \zeta_0 \quad \text{respuesta subcrítica}$$

Problema 2 (2 puntos)



$$\mathbf{V}_G = j4 \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$M = 1 \mu\text{H}, a = 10$$

$$R_G = 1 \Omega, R_L = 100 \Omega$$

$$L_P = L_S = L_2 = L_3 = 1 \mu\text{H}$$

$$C_2 = C_3 = 1 \mu\text{F}$$

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.

Apartado A (1 punto). Escribid un sistema algebraico de cinco ecuaciones con cinco incógnitas a partir del cual sea posible calcular los valores de $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{V}_P$ y $\mathbf{V}_3$.

Apartado B (1 punto). Utilizando los datos del enunciado, calculad la ganancia de potencia del circuito (P_L/P_G).

Apartado A.

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R_G + j\omega L_P) + \mathbf{I}_2 j\omega M + \mathbf{V}_P$$

Ecuaciones de malla

$$0 = \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_S + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)$$

Ecuación de nudos

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_3 \left(\frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_3 + \frac{1}{R_L} \right)$$

Transformador ideal

$$\mathbf{V}_3 = a\mathbf{V}_P, \mathbf{I}_G = a\mathbf{I}_3$$

Apartado B.

Reflejando impedancias y utilizando los valores del enunciado se tiene

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left\{ \left[R_G + j\omega L_P + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_S + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \right] + \frac{\left(\frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_3 + \frac{1}{R_L} \right)^{-1}}{a^2} \right\}$$

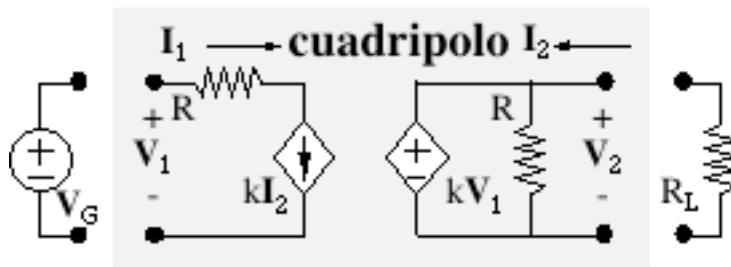
$$|\mathbf{I}_G| = j2A \quad P_G = \frac{|\mathbf{I}_G|^2 R_L}{2} = 2 \text{ W}$$

$$\frac{\mathbf{I}_G}{a} = \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_3 \left(\frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_3 \right) + \mathbf{I}_L \quad \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_3}{R_L} = j0.2A \quad P_L = \frac{|\mathbf{I}_L|^2 R_L}{2} = 2 \text{ W}$$

Luego

$$\text{Ganancia} = \frac{P_L}{P_G} = 1$$

Problema 3 (1 punto)



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

Apartado A (0.5 puntos). Obtened los parámetros híbridos (h) del cuadripolo.

Apartado B (0.5 puntos). ¿Cuánto vale la tensión en la fuente dependiente de corriente cuando el circuito tiene la configuración indicada en la figura?

Apartado A.

En régimen sinusoidal permanente, los parámetros híbridos (h) se definen mediante las expresiones

$$\mathbf{V}_1 = h_{11}\mathbf{I}_1 + h_{12}\mathbf{V}_2 \quad \mathbf{I}_2 = h_{21}\mathbf{I}_1 + h_{22}\mathbf{V}_2 \quad (1)$$

En el cuadripolo de la figura se cumplen las relaciones

$$\mathbf{I}_1 = k\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{k}, \mathbf{V}_2 = k\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{k}$$

Comparando estas expresiones con (1), se obtiene

$$h_{11} = 0 \, \Omega, h_{12} = \frac{1}{k}, h_{21} = \frac{1}{k}, h_{22} = 0 \, \text{S}$$

Apartado B.

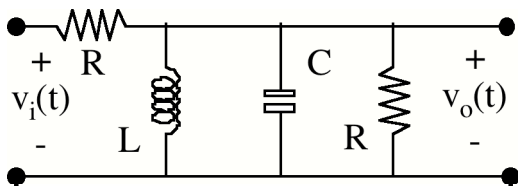
En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1 = h_{12}\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2 = h_{21}\mathbf{I}_1, \mathbf{V}_2 = -R_L\mathbf{I}_2$$

A partir de estas relaciones y llamando V_D a la tensión en la fuente dependiente (negativa en el extremo por el que sale la corriente), se tiene

$$V_D = V_G - kI_2R = V_G + kV_2\frac{R}{R_L} = V_G + k\frac{V_1R}{h_{12}R_L} = V_G + k^2V_G\frac{R}{R_L} = V_G\left(1 + k^2\frac{R}{R_L}\right)$$

Problema 4 (2.5 puntos)



Apartado A (0.4 puntos). La excitación del circuito de la figura está dada por la función $v_i(t) = e^{-at}u(t - t_0)$, con $t_0=0.5$ ms y $a=2 \times 10^3$ s⁻¹. Obténed su transformada de Laplace.

Apartado B (0.4 puntos). Obténed la función de transferencia del circuito. Utilizad los valores $R=2 \Omega$, $L=2$ mH, $C=0.5$ mF.

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\mathcal{L}\{v_0(t)\}}{\mathcal{L}\{v_i(t)\}}$$

Apartado C (1.2 puntos). Hallad $v_0(t)$ en el circuito de la figura suponiendo que

$$V_i(s) = \frac{1}{e} \frac{e^{-0.5 \times 10^3 s}}{s + 2 \times 10^3} \qquad H(s) = \frac{10^3 s}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6}$$

Apartado D (0.5 puntos). Obténed $v_0(t)$ en el circuito de la figura cuando $v_i(t) = \cos(\omega t)$ y $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-at}\sin(\omega t)$, siendo $\omega=1$ krad/s y $a=2 \times 10^3$ s⁻¹.

Apartado A.

$$v_i(t) = e^{-at}u(t - t_0)$$

□

$$v_i(t) = e^{-at} \text{ para } t \geq t_0$$

$$v_i(t) = 0 \text{ para cualquier otro valor de } t$$

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i(t)\} = \int_0^\infty v_i(t)e^{-st}dt = \int_{t_0}^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{e^{-at_0}e^{-st_0}}{s+a} = \frac{1}{e} \frac{e^{-0.5 \times 10^3 s}}{s + 2 \times 10^3}$$

Apartado B.

En el dominio transformado de Laplace las inductancias (L) y las capacidades (C) deben ser sustituidas por sL y $1/(sC)$, respectivamente. Aplicando este criterio, utilizando las transformadas de las tensiones de entrada y salida, agrupando las impedancias en paralelo y observando que el circuito resultante es un divisor de tensión, se tiene

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R}$$

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{Z(s)}{R + Z(s)} = \frac{1}{\frac{R}{Z(s)} + 1} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{2s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{10^3 s}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6}$$

Apartado C.

Haciendo $t_0 = 0.5 \times 10^{-3}$ s, la transformada de la tensión de salida puede expresarse como

$$V_0(s) = \mathcal{L}\{v_0(t)\} = H(s)V_i(s) = \frac{1}{e} \frac{10^3 s \square e^{-st_0}}{(s + 2 \times 10^3)(s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6)} = \frac{Y(s)e^{-st_0}}{e}$$

siendo

$$Y(s) = \frac{10^3 s}{(s + 2 \times 10^3)(s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6)}$$

Las raíces de esta función son los valores de s que anulan el denominador; es decir, $s_3 = -2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ y los que anulan el polinomio $s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6$.

$$s^2 + 2 \times 10^3 s + 10^6 = 0 \square s_{1,2} = \frac{-2 \times 10^3 \pm \sqrt{4 \times 10^6 - 4 \times 10^6}}{2} \square$$

$$\square s_1 = -10^3 \text{ s}^{-1} = s_2 \text{ (raíz doble)}$$

En consecuencia,

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{s + 10^3} + \frac{K_2}{(s + 10^3)^2} + \frac{K_3}{s + 2 \times 10^3}$$

$$K_1 = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{10^3 s}{(s + 2 \times 10^3)} \right] \right\}_{s=10^3} = \left\{ \frac{10^3(s + 2 \times 10^3) - 10^3 s}{(s + 2 \times 10^3)^2} \right\}_{s=10^3} = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$K_2 = \{Y(s)(s + s_2)^2\}_{s=s_2} = \left\{ \frac{10^3 s}{s + 2 \times 10^3} \right\}_{s=10^3} = -10^3 \text{ s}^{-2}$$

$$K_3 = \{Y(s)(s + s_3)^2\}_{s=s_3} = \left\{ \frac{10^3 s}{(s + 10^3)^2} \right\}_{s=2 \times 10^3} = -2 \text{ s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \frac{1}{e} \mathcal{L}^{-1} \{e^{-st_0} Y(s)\} = \frac{1}{e} \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\}_{t=t_0} = \\ &= \frac{1}{e} \left[2e^{-10^3(t-t_0)} - 10^3(t-t_0)e^{-10^3(t-t_0)} - 2e^{-2 \times 10^3(t-t_0)} \right] \end{aligned}$$

Apartado D.

La entrada es una señal sinusoidal permanente caracterizada por los parámetros

$$\begin{aligned} v_i(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) & A &= 1 \text{ V} \\ & & \omega &= 1 \text{ krad/s} \\ v_i(t) &= \cos(\omega t) & \varphi &= 0^\circ \end{aligned}$$

En estas circunstancias la salida está dada por

$$v_0(t) = A|H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle H(j\omega)]$$

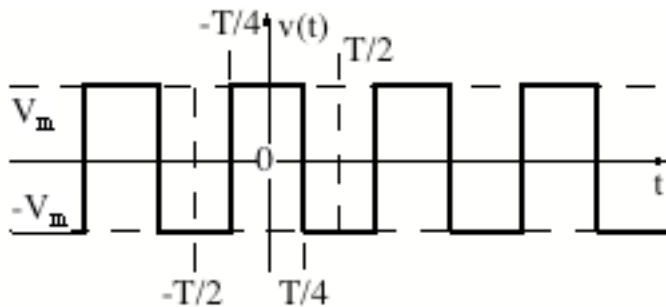
En este caso

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{1}{a^2 + j2a\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^4 + (2a\omega)^2}} = \frac{0.25 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}, \quad \angle(\omega) = -\arctg \frac{2\omega}{a} = -45^\circ$$

$$v_0(t) = \frac{0.25 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \cos(10^3 t - 45^\circ) \text{ V } ([10^3] = \text{rad/s}, [t] = \text{s})$$

Problema 5 (1.5 puntos)



Apartado A (0.75 puntos). Obtened el desarrollo en serie de Fourier con formulación trigonométrica de la tensión periódica mostrada en la figura, en la que $V_m=1$ V y $T=2$ s.

Apartado B (0.75 puntos). Dada la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 10^{12}}{2s^2 + 4 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}}$$

obtened las expresiones que caracterizan las variaciones de su módulo y su fase con la frecuencia angular. ¿Hacia qué valores tienden el módulo y la fase cuando la frecuencia angular tiende a 0 y a ∞ rad/s? ¿Cuánto valen el módulo y la fase de la función cuando $\omega=1$ Mrad/s?

Apartado A.

Se trata de una función par, ya que $v(-t)=v(t)$, con lo que $b_k=0$ V. Además,

$$a_v = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} v(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} V_m dt + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} -V_m dt = 0 \text{ V}$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} V_m \cos\left(\frac{2k\omega t}{T}\right) dt + \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} -V_m \cos\left(\frac{2k\omega t}{T}\right) dt = \frac{4V_m}{k\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{k\omega}{2}\right)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = a_k, \quad \phi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} = 0^\circ$$

$$\text{Utilizando los datos, } v(t) = a_v + \sum_{k=1} A_k \cos(k\omega t - \phi_k) = \sum_{k=1} \frac{4}{k\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{k\omega}{2}\right) \cos(k\omega t) \text{ V}$$

Apartado B.

La variación de la función de transferencia con la frecuencia angular está dada por

$$H(\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{10^{12} - \omega^2}{2(10^{12} - \omega^2) + j4\omega 10^6}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\text{abs}(10^{12} - \omega^2)}{\sqrt{4(10^{12} - \omega^2)^2 + 16\omega^2 10^{12}}} = \frac{\text{abs}(10^{12} - \omega^2)}{2(10^{12} + \omega^2)}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{4\omega 10^6}{2(10^{12} - \omega^2)}$$

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \quad |H(\omega)| = 0.5, \quad \varphi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \quad |H(\omega)| = 0.5, \quad \varphi(\omega) = 0^\circ$$

$$\omega = 1 \text{ Mrad/s} \quad |H(\omega)| = 0, \quad \varphi(\omega) = 90^\circ (\omega > 1 \text{ Mrad/s}), -90^\circ (\omega < 1 \text{ Mrad/s})$$

Problema 6 (1 punto)

Se tiene un filtro cuya característica de transferencia es

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 3}$$

Apartado A (0.5 puntos). Indicad justificadamente de qué tipo es el filtro.

Apartado B (0.5 puntos). Obtened (si existe) el rango de frecuencias angulares en el que el módulo de la función de transferencia es mayor que el valor del módulo para una frecuencia nula.

Apartado A.

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{1 + j\omega}{(3 - \omega^2) + j3\omega} \quad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(3 - \omega^2)^2 + (3\omega)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 9}}$$

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| = 1/3, \quad \omega = \sqrt{6} \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0, \quad 0 < \omega < \sqrt{6} \Rightarrow |H(j\omega)| \neq 0$$

Estas características corresponden a un filtro paso bajo.

Apartado B.

Si existe el rango indicado, en él ha de cumplirse

$$\sqrt{\frac{1 + \omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 9}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1 + \omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 9} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 6 \geq \omega^2 \Leftrightarrow 0 < \omega < \sqrt{6} \text{ rad/s}$$

En el rango indicado, el módulo de la función de transferencia es mayor que 1/3, que es el valor del módulo cuando ω tiende a 0 rad/s.

