

Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación (primer curso)

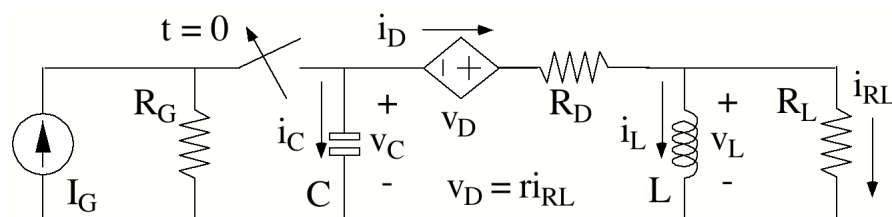
**Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
(Universidad de Vigo)**

Examen de septiembre de 2009 (soluciones)

Preparado por:
Enrique Sánchez

Dpto. Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Vigo

Problema 1 (2 puntos)



El circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, no experimenta más alteraciones después del cambio de posición del interruptor.

Apartado A (1.2 puntos). Obtened los valores de v_C , i_C , v_L e i_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$.

Apartado B (0.8 puntos). Utilizando los valores $I_G = 2$ A, $L = 1$ H, $C = 1$ F, $R_G = R_D = R_L = 1$ Ω , $r = 1$ Ω , hallad las expresiones temporales que rigen el comportamiento de v_C e i_L para $t \geq 0$.

Apartado A.

Para $t = 0^-$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto, con lo que

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A}, v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Además,

$$i_D(0^-) = i_L(0^-) + i_{RL}(0^-) = i_L(0^-) + \frac{v_L(0^-)}{R_L} = i_L(0^-)$$

$$I_G = \frac{v_C(0^-)}{R_G} + i_C(0^-) + i_D(0^-) = \frac{v_C(0^-)}{R_G} + i_L(0^-) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_C(0^-) &= -v_D(0^-) + i_D(0^-)R_D + v_L(0^-) = r i_{RL}(0^-) + i_D(0^-)R_D + v_L(0^-) = \\ &= -r \frac{v_L(0^-)}{R_L} + i_L(0^-)R_D + v_L(0^-) = i_L(0^-)R_D \end{aligned} \quad (2)$$

Combinando (1-2) se obtiene

$$v_C(0^-) = \frac{R_G R_D}{R_G + R_D} I_G, i_L(0^-) = \frac{R_G}{R_G + R_D} I_G$$

Para $t = 0^+$, dada la continuidad de las magnitudes fundamentales de la inductancia y la capacidad, se tiene

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R_G R_D}{R_G + R_D} I_G, i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{R_G}{R_G + R_D} I_G$$

Además,

$$i_D(0^+) = i_L(0^+) + i_{RL}(0^+) = i_L(0^+) + \frac{v_L(0^+)}{R_L}$$

$$v_C(0^+) = -r i_{RL}(0^+) + i_D(0^+) R_D + v_L(0^+) = -r \frac{v_L(0^+)}{R_L} + \left[i_L(0^+) + \frac{v_L(0^+)}{R_L} \right] R_D + v_L(0^+) \quad \square$$

$$\square \quad v_L(0^+) = \frac{[v_C(0^+) - i_L(0^+) R_D] R_L}{-r + R_D + R_L} = 0 \text{ V}$$

$$i_C(0^+) = -i_D(0^+) = -i_L(0^+) - \frac{v_L(0^+)}{R_L} = -i_L(0^+) = -\frac{R_G}{R_G + R_D} I_G$$

Para $t = \infty$ la inductancia es un cortocircuito y la capacidad es un circuito abierto.

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A}, v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Además,

$$i_D(\infty) = -i_C(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$i_D(\infty) = i_L(\infty) + i_{RL}(\infty) = i_L(\infty) + \frac{v_L(\infty)}{R_L} \quad \square \quad i_L(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$v_C(\infty) = -r i_{RL}(\infty) + i_D(\infty) R_D + v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Apartado B.

$$i_D(t) = i_L(t) + i_{RL}(t) = i_L(t) + \frac{v_L(t)}{R_L} = i_L(t) + \frac{L}{R_L} \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$0 = i_C(t) + i_D(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L(t) + \frac{L}{R_L} \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3)$$

$$v_C(t) = -r i_{RL}(t) + i_D(t) R_D + v_L(t) =$$

$$= i_L(t) R_D + v_L(t) \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) = i_L(t) R_D + L \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) \frac{di_L(t)}{dt} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) y utilizando los datos del enunciado se obtiene

$$LC \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left(R_D C + \frac{L}{R_L} \right) \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \quad (5)$$

A la vista de (5) se deduce que la ecuación característica del circuito es

$$as^2 + bs + c = 0; a = 1, b = 2, c = 1$$

cuyas raíces son

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -1 \text{ s}^{-1} \text{ (raíz doble)}$$

Dado que las dos raíces de la ecuación característica son iguales, la respuesta del circuito es amortiguada, con lo que

$$i_L(t) = i_{Lf} + A t s_1 t + B e^{s_2 t} = i_{Lf} + A t e^{-t} + B e^{-t} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (4) se obtiene (utilizando los datos del enunciado y los de las raíces de la ecuación característica)

$$\begin{aligned}
 v_C(t) = i_{Lf}R_D + Ate^{s_1t} \left[R_D + s_1L \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) \right] + Ae^{s_1t} \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) + \\
 + Be^{s_2t} \left[R_D + s_2L \left(-\frac{r}{R_L} + \frac{R_D}{R_L} + 1 \right) \right] = \\
 = i_{Lf} + Ae^{-t}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Igualando (6-7) a los resultados del cálculo de las condiciones iniciales y finales (particularizadas para los datos del enunciado) presentado en el apartado anterior, se tiene

$$1 = i_L(0) = i_{Lf} + A + B$$

$$1 = v_C(0) = i_{Lf} + A$$

$$0 = i_L(\infty) = i_{Lf}$$

Resolviendo este sistema se llega a

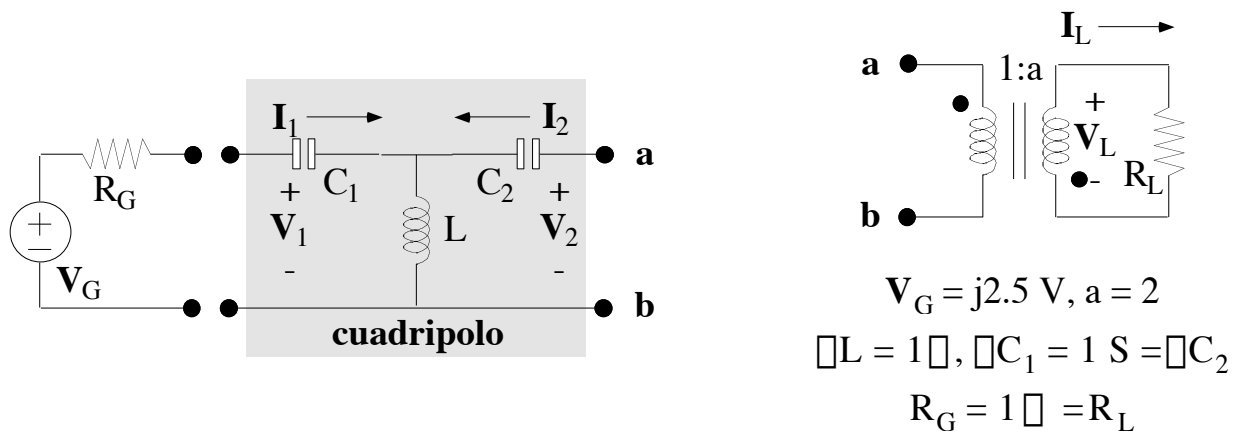
$$i_{Lf} = 0 \text{ A}, A = 1 \text{ A/s}, B = 0 \text{ A}$$

con lo que las expresiones buscadas son

$$i_L(t) = e^{-t} \text{ A (t en s)}$$

$$v_C(t) = e^{-t} \text{ V (t en s)}$$

Problema 2 (2 puntos)



Apartado A (0.25 puntos). El cuadripolo de la izquierda, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Hallad sus parámetros y.

Apartado B (0.25 puntos). Obtened la ganancia de corriente (I_2 / I_1) del circuito completo de la izquierda con la salida en cortocircuito (se conecta un cortocircuito entre **a** y **b**). Suponed que los parámetros y del cuadripolo son conocidos.

Apartado C (1 punto). Se conecta al cuadripolo una carga como la mostrada en la figura de la derecha. Obtened las potencias compleja, media, reactiva y real en R_L .

Apartado D (0.5 puntos). En las condiciones del apartado anterior (con $L = 1 \mu\text{H}$, $C_1 = 1 \mu\text{F} = C_2$) indicad hacia qué valores tiende el módulo de V_L cuando la frecuencia angular toma valores muy bajos y muy altos.

Apartado A.

En el cuadripolo se cumplen las relaciones

$$I_1 = V_{12} \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2 \right) - V_2 j\omega C_2 \quad (1)$$

$$I_2 = V_{12} \left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_1 \right) - V_1 j\omega C_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{12} - \frac{\mathbf{I}_1}{j\omega C_1} + \mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{I}_1}{j\omega C_1} \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{12} - \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C_2} + \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \frac{\mathbf{I}_2}{j\omega C_2} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) en (1) y (4) en (2) se obtiene

$$\mathbf{I}_1 = - \frac{\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2 \right) \mathbf{V}_1}{1 + \frac{1}{\omega^2 LC_1} - \frac{C_2}{C_1}} + \frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L \left(1 + \frac{1}{\omega^2 LC_1} - \frac{C_2}{C_1} \right)} \quad (5)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L \left(1 + \frac{1}{\omega^2 LC_2} - \frac{C_1}{C_2} \right)} - \frac{\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2 \right) \mathbf{V}_2}{1 + \frac{1}{\omega^2 LC_2} - \frac{C_1}{C_2}} \quad (6)$$

Los parámetros y se definen mediante las relaciones

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12} \quad (7)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \quad (8)$$

Igualando término a término (5-6) y (7-8) se llega a

$$y_{11} = - \frac{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2}{1 + \frac{1}{\omega^2 LC_1} - \frac{C_2}{C_1}}, y_{12} = \frac{1}{j\omega L \left(1 + \frac{1}{\omega^2 LC_1} - \frac{C_2}{C_1} \right)}$$

$$y_{21} = \frac{1}{j\omega L \left(1 + \frac{1}{\omega^2 LC_2} - \frac{C_1}{C_2} \right)}, y_{22} = - \frac{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C_2}{1 + \frac{1}{\omega^2 LC_2} - \frac{C_1}{C_2}}$$

Apartado B.

Teniendo en cuenta que la existencia de un cortocircuito entre **a** y **b** impone la condición de que la tensión de salida sea nula se llega, utilizando (7-8), a

$$V_2 = 0 \Rightarrow I_1 = V_1 y_{11}, I_2 = V_1 y_{21} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{11}}{y_{21}}$$

Apartado C.

El circuito queda caracterizado por las ecuaciones

$$V_G = I_1 \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L \right) + I_2 j\omega L$$

$$V_2 = I_1 j\omega L + I_2 \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L \right)$$

$$V_L = I_L R_L$$

$$V_L = -aV_2, I_2 = aI_L$$

Utilizando los datos del enunciado estas ecuaciones quedan en la forma

$$j2.5 = I_1 + jI_2$$

$$V_2 = jI_1$$

$$V_L = I_L$$

$$V_L = -2V_2, I_2 = 2I_L$$

Se tiene así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas que, una vez resuelto, proporciona los siguientes valores:

$$I_1 = j0.5 \text{ A}, I_2 = 2 \text{ A}, I_L = 1 \text{ A}$$

$$V_2 = -0.5 \text{ V}, V_L = 1 \text{ V}$$

Por consiguiente,

$$Z_L = R_L \quad \text{Im}\{Z_L\} = 0 \quad Q = 0 \text{ VAR}, S = \frac{|I_L|^2 R_L}{2} = 0.5 \text{ VA} = 0.5 \text{ W} = \text{Re}\{S\} = P$$

$$p_L(t) = i_L^2(t) R_L = [\text{Re}\{I_L e^{j\omega t}\}]^2 R_L = \cos^2(\omega t) \text{ W}$$

Apartado D.

Para frecuencias muy bajas las capacidades son circuitos abiertos y la inductancia, un cortocircuito, con lo que no llega corriente a R_L y, por tanto, el módulo de V_L tiende a 0 V.

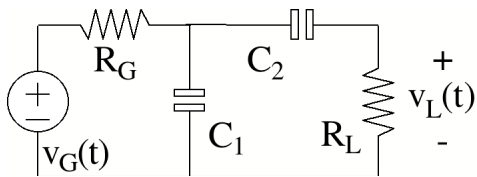
Para frecuencias muy altas la inductancia es un circuito abierto y las capacidades, cortocircuitos, con lo que el circuito se reduce al generador en serie con su resistencia y la de carga reflejada en la puerta de salida.

Es decir,

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \quad |V_L| = 0 \text{ V}$$

$$\omega = 10^6 \text{ rad/s} \quad |V_L| = \frac{a(R_L/a^2)}{R_G + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + R_L/a^2} = \frac{a(R_L/a^2)}{R_G + R_L/a^2} = 0.2 \text{ V}$$

Problema 3 (2 puntos)



$$R_G = 0.5 \quad = R_L$$

$$C_1 = 1 \text{ nF}, C_2 = 1 \text{ } \mu\text{F}$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{\mathcal{L}\{v_L(t)\}}{\mathcal{L}\{v_G(t)\}}$$

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 4}$$

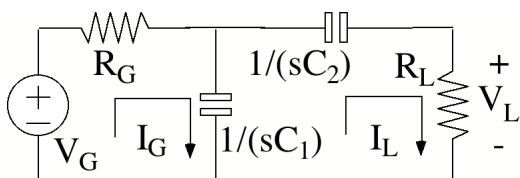
Apartado A (0.5 puntos). Utilizando los datos indicados a la derecha de la figura y recurriendo a aproximaciones matemáticas razonables, obtened la transformada de Laplace, $H(s)$, de la función de transferencia del circuito.

Apartado B (0.5 puntos). Obtened la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia indicada a la derecha de la figura.

Apartado C (0.5 puntos). Obtened la expresión temporal en régimen permanente de la tensión de salida de un circuito con la función de transferencia indicada a la derecha de la figura y siendo la tensión de entrada $v_G(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, con $A = 2 \text{ V}$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$ y $\phi = 0^\circ$.

Apartado D (0.5 puntos). Calculad el valor al que tiende el módulo de la función de transferencia indicada a la derecha de la figura cuando el circuito correspondiente opera en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia de 2 rad/s .

Apartado A.



En el dominio s el circuito queda como se muestra en la figura adjunta.

En el circuito se verifican las relaciones que se indican seguidamente.

$$V_G = I_G \left(R_G + \frac{1}{sC_1} \right) - \frac{I_L}{sC_1}$$

$$V_G = -\frac{I_G}{sC_1} + I_L \left(\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} + R_L \right)$$

$$V_L = I_L R_L$$

A partir de estas ecuaciones puede obtenerse

$$\frac{V_L}{V_G} = \frac{s(R_G C_1)}{s^2 + s \left[\frac{1}{C_2 R_G R_L} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_L} \right) \right] + \frac{1}{C_1 C_2 R_G R_L}}$$

Utilizando los datos del problema en la última ecuación se llega a

$$\frac{V_L}{V_G} = \frac{2 \times 10^9 s}{s^2 + s(4 \times 10^9 + 4 \times 10^6) + 4 \times 10^{15}}$$

Dado que $10^6 \ll 10^9$, la última expresión puede aproximarse por

$$\frac{V_L}{V_G} = \frac{2 \times 10^9 s}{s^2 + 4 \times 10^9 s + 4 \times 10^{15}}$$

Apartado B.

La transformada de Laplace de la función de transferencia puede escribirse como

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 4} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Las raíces del denominador se calculan como se indica a continuación.

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \Rightarrow s_1 = -2s^{-1} = s_2$$

De esta forma, la transformada de Laplace de la función de transferencia puede expresarse como

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s - s_1)^2} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{(s - s_1)^2}$$

donde

$$K_1 = \left\{ \frac{d}{ds} [H(s)(s - s_1)^2] \right\}_{s=s_1} = 2$$

$$K_2 = \{ [H(s)(s - s_1)^2] \}_{s=s_1} = -4$$

Por consiguiente,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}$$

Apartado C.

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 4} \quad H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{j2\omega}{(4 - \omega^2) + j4\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{2\omega}{\omega^2 + 4}, \quad \angle(j\omega) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{4\omega}{4 - \omega^2}\right)$$

$$|H(j\omega)|_{\omega=1 \text{ rad/s}} = 0.4, \quad \angle(j\omega)_{\omega=1 \text{ rad/s}} = 90^\circ - \arctg\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$v_G(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

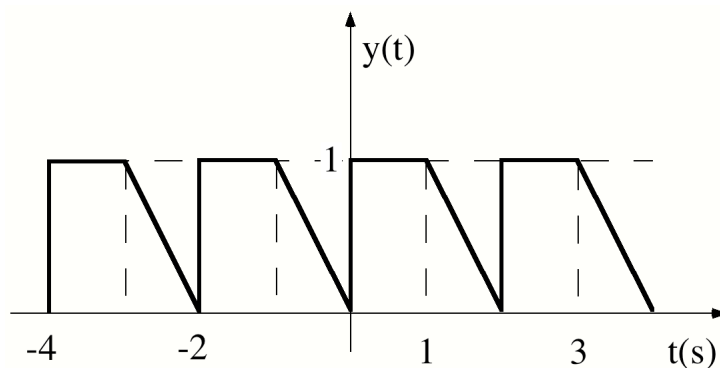
$$v_L(t) = A|H(j\omega)| \cos[\omega t + \varphi + \angle(j\omega)] = 0.8 \cos\left[t + 90^\circ - \arctg\left(\frac{4}{3}\right)\right] \text{ V}$$

Apartado D.

Se trata de la situación indicada en el apartado anterior, con lo que

$$\square \quad |H(j\square)|_{\square=2 \text{ rad/s}} = 0.5$$

Problema 4 (2 puntos)



$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 4}$$

Apartado A (0.75 puntos). Obtened el desarrollo en serie de Fourier (formulación trigonométrica) del tren periódico de pulsos representado en la parte izquierda.

Apartado B (0.5 puntos). Obtened el módulo y la fase de la transformada de Fourier de la función constituida únicamente por el primer pulso positivo del tren de pulsos.

Apartado C (0.75 puntos). Dado un filtro caracterizado por la función de transferencia indicada a la derecha de la figura, obtened los valores a los que tienden el módulo y la fase de dicha función cuando la frecuencia tiende a 0 y a ∞ rad/s. ¿De qué tipo es el filtro?

Apartado A.

De la observación de la figura se desprende que el periodo de la señal es $T = 2$ s y que la expresión matemática de la misma es (considerando el primer pulso positivo)

$$y(t) = 1, \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \text{ s}$$

$$y(t) = 2 - t, \text{ para } 1 \leq t \leq 2 \text{ s}$$

Aplicando las expresiones para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se tiene

$$a_v = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T 2dt - \frac{1}{T} \int_{T/2}^T t dt =$$

$$= \frac{1}{T} [t]_0^{T/2} + \frac{1}{T} [2t]_{T/2}^T - \frac{1}{T} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{T/2}^T = \frac{3}{2} - \frac{3T}{8}$$

Aplicando los datos del problema se llega a

$$a_v = 0.75$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T 2 \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{teniendo en cuenta que} \\ \int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T} \left(\frac{T}{2k\pi} \right) \left[\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_0^{T/2} + \frac{4}{T} \left(\frac{T}{2k\pi} \right) \left[\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{T/2}^T - \frac{2}{T} \left[\frac{\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2} + \frac{t \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)}{\frac{2k\pi}{T}} \right]_{T/2}^T =$$

$$= \frac{T}{2(k\pi)^2} [\cos(k\pi) - 1]$$

Aplicando los datos del problema se llega a

$$a_k = \frac{1}{(k\pi)^2} [\cos(k\pi) - 1]$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T 2 \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T t \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{teniendo en cuenta que} \\ \int x \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{2}{T} \left(\frac{T}{2k\pi} \right) \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_0^{T/2} - \frac{4}{T} \left(\frac{T}{2k\pi} \right) \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{T/2}^T - \frac{2}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2} - \frac{t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)}{\frac{2k\pi}{T}} \right]_{T/2}^T = \\ &= \frac{1}{k\pi} [\cos(k\pi) - 1] + \frac{T}{2k\pi} [2 - \cos(k\pi)] \end{aligned}$$

Aplicando los datos del problema se tiene

$$b_k = \frac{1}{k\pi}$$

En consecuencia, la serie queda como

$$y(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T} - \phi_k\right)$$

siendo

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg(b_k/a_k)$$

Apartado B.

La transformada de Fourier se calcula como se indica a continuación.

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = A(\omega) - jB(\omega) = |Y(\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cos(\omega t) dt = \int_0^1 \cos(\omega t) dt + \int_1^2 2\cos(\omega t) dt - \int_1^2 t\cos(\omega t) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{teniendo en cuenta que} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a} \end{array} \right\} = \\ &= \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 - \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega^2} + \frac{t\sin(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 = \frac{\cos(\omega)[1 - 2\sin(\omega)]}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\sin(\omega t) dt = \int_0^1 \sin(\omega t) dt + \int_1^2 2\sin(\omega t) dt - \int_1^2 t\sin(\omega t) dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{teniendo en cuenta que} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

$$= - \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 - \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} - \frac{t \cos(\omega t)}{\omega} \right]_1^2 = \frac{\sin(\omega) - \sin(2\omega) + \omega}{\omega^2}$$

En consecuencia,

$$|Y(\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$

Apartado C.

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{j2\omega}{(4 - \omega^2) + j4\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{2\omega}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + (4\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{4\omega}{4 - \omega^2}\right)$$

Utilizando estos resultados se llega a

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(\omega)| = 0, \quad \varphi(\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = \infty \text{ rad/s} \Rightarrow |H(\omega)| = 0, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

Además, para un valor de ω comprendido entre 0 e ∞ rad/s el módulo de la función de transferencia es positivo. Por ejemplo,

$$\omega = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0.4$$

En consecuencia, puede concluirse que se trata de un filtro paso banda.