

Examen de junio de 2010

Soluciones

Análisis de circuitos
Ingeniería Técnica de Telecomunicación
Primer curso
Año académico 2009-10

Enrique Sánchez
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
UNIVERSIDAD DE VIGO

correo electrónico: enrique.sanchez@uvigo.es

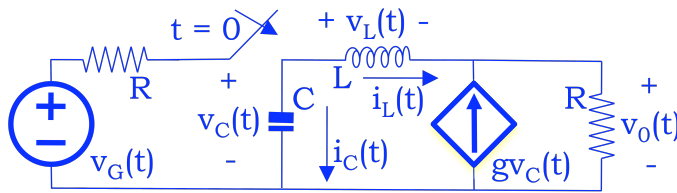
Sitios web: <http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/index.html>

<http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/acGDAF.html>

<http://www.tsc.uvigo.es>

<http://www.teleco.uvigo.es>

PROBLEMA 1



INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Junio 2010
Problema 1

En el circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua de valor V_G , no se producen más cambios después del cierre del interruptor.

- Hallad los valores de v_C , i_C , v_L e i_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ **(1.2 puntos)**.
- Hallad las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de $v_C(t)$ e $i_L(t)$ para $t \geq 0$ s **(0.8 puntos)**.
- La fuente independiente continua es sustituida por otra variable con el tiempo, $v_G(t)$ y la fuente dependiente es dejada en circuito abierto ($g = 0$ S). En estas condiciones, hallad la función de transferencia para $t \geq 0$ s, estando aquella definida como

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_G(s)}$$

siendo $V_O(s)$ y $V_G(s)$, respectivamente, las transformadas de Laplace de $v_O(t)$ y $v_G(t)$. Si el circuito se comporta como un filtro, ¿a qué tipo corresponde? **(1.2 puntos)**.

- Obtened la expresión temporal de $v_O(t)$ para $t \geq 0$ s **(0.8 puntos)** sabiendo que $v_G(t)$ es la función escalón unitario y que la función de transferencia del circuito es

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_G(s)} = \frac{10^{12}}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12}}$$

PROBLEMA 1, apartado a

Para $t = 0^-$ s, las inductancias son cortocircuitos y las capacidades, circuitos abiertos, con lo que

$$v_L(0^-) = 0 \text{ V} \quad i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

Además,

$$i_L(0^-) = -i_C(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) + [i_L(0^-) + g v_C(0^-)]R \Rightarrow v_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

Para $t = 0^+$ s, ha de mantenerse la continuidad de la tensión en la capacidad y de la corriente en la inductancia, con lo que

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Además, se cumplen las relaciones

$$\frac{V_G - v_C(0^+)}{R} = i_C(0^+) + i_L(0^+) \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_G}{R}$$

$$v_C(0^+) = v_L(0^+) + [i_L(0^+) + g v_C(0^+)]R_0 \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \text{ V}$$

En $t = \infty$ s el circuito está en régimen permanente continuo, lo cual significa que las inductancias y las capacidades son, respectivamente, cortocircuitos y circuitos abiertos. Es decir,

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A} \quad v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Además,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{V_G - v_C(\infty)}{R} = i_C(\infty) + i_L(\infty) \\ v_C(\infty) = v_L(\infty) + [i_L(\infty) + g v_C(\infty)]R \end{array} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_C(\infty) = \frac{V_G}{2 - gR} \\ i_L(\infty) = \frac{V_G}{R} \left(\frac{1 - gR}{2 - gR} \right) \end{array} \right.$$

PROBLEMA 1, apartado b

En el circuito, para $t \geq 0$ s, se cumplen las siguientes relaciones:

$$(1) \quad \frac{V_G - v_C(t)}{R} = i_C(t) + i_L(t) \quad v_C(t) = v_L(t) + [i_L(t) + g v_C(t)]R \quad (2)$$

Además, la inductancia y la capacidad están caracterizadas, respectivamente, por las siguientes relaciones funcionales:

$$(3) \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4)$$

Despejando $i_L(t)$ de (1), y teniendo en cuenta (4), se obtiene

$$i_L(t) = \frac{V_G}{R} - \frac{v_C(t)}{R} - C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (2), y teniendo en cuenta (3), se llega a

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC \right) \frac{dv_C(t)}{dt} + (2 - gR) v_C(t) = V_G \quad (6)$$

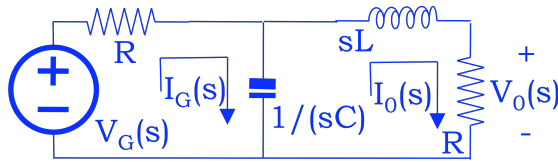
Despejando $v_C(t)$ de (2) y sustituyendo el resultado en (1), teniendo en cuenta (4), se obtiene

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC \right) \frac{di_L(t)}{dt} + (2 - gR) i_L(t) = \frac{(1 - gR) V_G}{R} \quad (7)$$

Las ecuaciones (6-7) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

PROBLEMA 1, apartado c

En las condiciones indicadas (fuente dependiente en circuito abierto) y utilizando transformadas de Laplace, el circuito queda en la forma mostrada en la figura adjunta, con lo que, aplicando análisis por mallas, se llega a



INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Junio 2010
Problema 1, apartados c-d

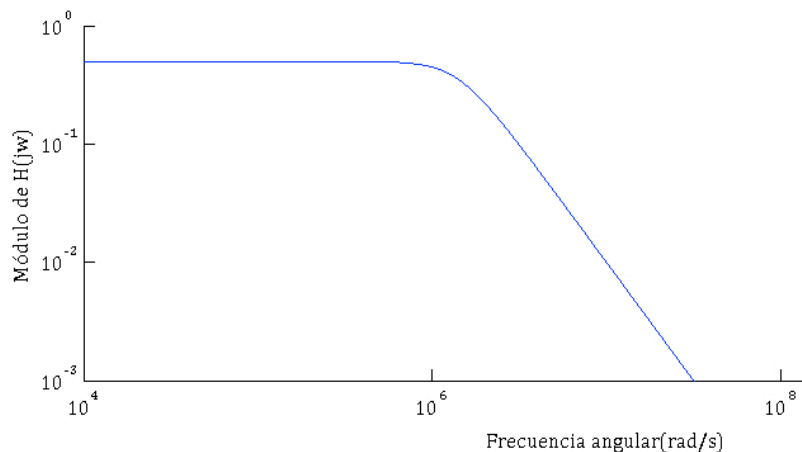
$$\begin{aligned} V_G(s) &= I_G(s) \left(R + \frac{1}{sC} \right) - \frac{I_0(s)}{sC} \\ 0 &= -\frac{I_G(s)}{sC} + I_0(s) \left(\frac{1}{sC} + sL + R \right) \end{aligned} \Rightarrow H(s) = \frac{I_0(s)R}{V_G(s)} = \frac{1/(LC)}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) + \frac{2}{LC}}$$

La respuesta en frecuencia del circuito se obtiene a partir del módulo de su función de transferencia, llegándose a que

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} \Rightarrow |H(j\omega)| = |H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\left(\frac{2}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left[\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \omega \right]^2}}$$

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} &\Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{2} \\ \omega \text{ intermedia} &\Rightarrow \text{valor finito de } |H(j\omega)| \\ \omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} &\Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego el circuito se comporta como un filtro paso bajo.



PROBLEMA 1, apartado d

$$v_G(t) = u(t) \Rightarrow V_G(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_O(s) = H(s)V_G(s) = \frac{10^{12}}{s(s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12})} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$s^2 + 2 \times 10^6 s + 2 \times 10^{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_c &= -\alpha + j\beta & s_c^* &= -\alpha - j\beta \\ \alpha &= 10^6 \text{ s}^{-1} & \beta &= 10^6 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$V_O(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_c}{s - s_c} + \frac{K_c^*}{s - s_c^*}$$

$$K_0 = \left[\frac{sN(s)}{D(s)} \right]_{s=0 \text{ s}^{-1}} = 0.5 \text{ V}$$

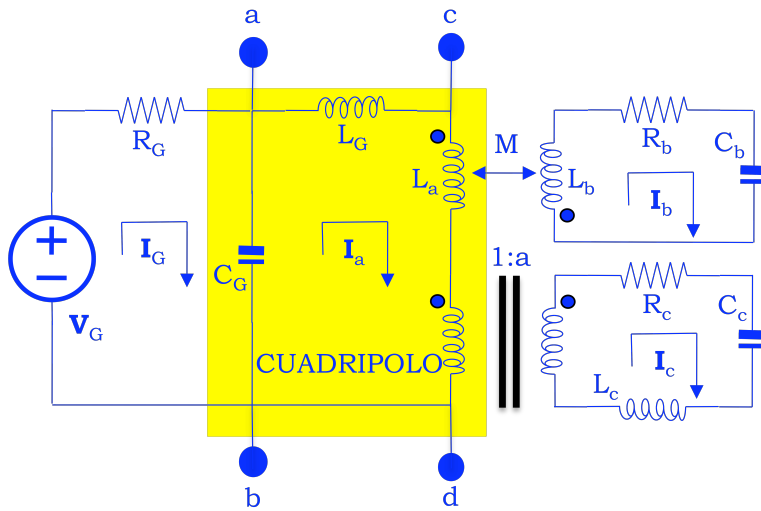
$$K_c = \left[\frac{(s - s_c)N(s)}{D(s)} \right]_{s=s_c} = (-0.25 + j0.25) \times 10^6 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |K_c| = 0.25\sqrt{2} \times 10^6 \text{ V} \quad \theta_c = \arctg \frac{0.25 \times 10^6}{-0.25 \times 10^6} = -135^\circ$$

En consecuencia,

$$v_O(t) = K_0 u(t) + 2|K_c| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta_c) = 0.5 + 0.5\sqrt{2} \times 10^6 e^{-10^6 t} \cos(10^6 t - 135^\circ) \text{ V}$$

PROBLEMA 2



INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Junio 2010
Problema 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

- Escribid un sistema algebraico de cuatro ecuaciones a partir del cual sea posible determinar los valores de I_G , I_a , I_b e I_c . No obtengáis los valores de estos fasores **(0.8 puntos)**.
- Suponiendo conocido el valor de I_a , obtened la tensión V_{cd} y la potencia compleja entre **c** y **d**. No desarrolléis los cálculos; basta con dejarlos indicados **(0.4 puntos)**.
- Obtened los parámetros de admitancia del cuadripolo **abcd**; en lo posible, agrupad impedancias sin desarrollar los cálculos hasta obtener expresiones finales. ¿Puede ser simétrico este cuadripolo? **(0.6 puntos)**.
- Suponiendo que los elementos del circuito tienen los valores indicados más abajo, calculad el equivalente de Thévenin entre los puntos **a** y **b**. Podéis hacerlo considerando el circuito tal y como ha sido dibujado o bien a partir del conocimiento de los parámetros de admitancia **(0.6 puntos)**.

$V_G = 1 \text{ V}$	$\omega M = 0.5 \text{ } \Omega$	$a = 3$
$R_G = 1 \text{ } \Omega$	$R_b = 2.5 \text{ } \Omega$	$R_c = 8.1 \text{ } \Omega$
$\omega L_G = 0.5 \text{ } \Omega$	$\omega L_a = 0.5 \text{ } \Omega$	$\omega L_b = 1 \text{ } \Omega$
$\omega C_G = 2 \text{ S}$	$\omega C_b = 1 \text{ S}$	$\omega C_c = 1 \text{ S}$

- e. Suponiendo que los elementos del circuito tienen los valores indicados más abajo, obtened la expresión temporal de la potencia en la rama **cd**. Utilizad aproximaciones matemáticas razonables y agrupaciones de impedancias siempre que sea posible **(0.6 puntos)**.

$$v_G(t) = V_{DC} + V_{AC} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$V_{DC} = 1 \text{ V}$$

$$V_{AC} = 1 \text{ V}$$

$$\omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$\varphi = 0^\circ$$

$$R_G = 1 \Omega$$

$$L_G = 0.5 \mu\text{H}$$

$$L_a = 0.5 \mu\text{H}$$

$$C_G = 2 \mu\text{F}$$

$$R_b = 2.5 \Omega$$

$$M = 0.5 \mu\text{H}$$

$$L_b = 1 \mu\text{H}$$

$$C_b = 1 \mu\text{F}$$

$$R_c = 8.1 \Omega$$

$$a = 3$$

$$L_c = 1 \mu\text{H}$$

$$C_c = 1 \mu\text{F}$$

PROBLEMA 2, apartado a

Reflejando impedancias, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} \right) - \frac{\mathbf{I}_a}{j\omega C_G} \\ 0 &= -\frac{\mathbf{I}_G}{j\omega C_G} + \mathbf{I}_a \left[\frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G + j\omega L_a + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_b + R_b + \frac{1}{j\omega C_b}} + \frac{R_c + \frac{1}{j\omega C_c} + j\omega L_c}{a^2} \right] \\ 0 &= \mathbf{I}_a j\omega M + \mathbf{I}_b \left(j\omega L_b + R_b + \frac{1}{j\omega C_b} \right) \\ \mathbf{I}_a &= a\mathbf{I}_c \end{aligned}$$

PROBLEMA 2, apartado b

De nuevo reflejando impedancias, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{cd} &= \mathbf{I}_a \left[j\omega L_a + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_b + R_b + \frac{1}{j\omega C_b}} + \frac{R_c + \frac{1}{j\omega C_c} + j\omega L_c}{a^2} \right] \\ S_{cd} &= \frac{\mathbf{V}_{cd} \mathbf{I}_a^*}{2} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2, apartado c

Haciendo

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{ab} \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{cd}$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_G$$

$\mathbf{I}_2$: corriente que entra en c

teniendo en cuenta que las impedancias reflejadas en los primarios de ambos transformadores (lineal e ideal, respectivamente) son

$$Z_{lin} = \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_b + R_b + \frac{1}{j\omega C_b}} \quad Z_{id} = \frac{R_c + \frac{1}{j\omega C_c} + j\omega L_c}{a^2}$$

y aplicando análisis por nudos, se llega a

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 \left(\frac{1}{j\omega L_G} + j\omega C_G \right) - \frac{\mathbf{V}_2}{j\omega L_G} \quad \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_G} + \mathbf{V}_2 \left(\frac{1}{j\omega L_G} + \frac{1}{j\omega L_a + Z_{lin} + Z_{id}} \right) \quad (1)$$

Las ecuaciones que definen los parámetros de admitancia son

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \quad (2)$$

Comparando término a término (1) y (2) se obtienen los parámetros de admitancia buscados, que son

$$y_{11} = \frac{1}{j\omega L_G} + j\omega C_G \quad y_{12} = -\frac{1}{j\omega L_G}$$

$$y_{21} = -\frac{1}{j\omega L_G} \quad y_{22} = \frac{1}{j\omega L_G} + \frac{1}{j\omega L_a + Z_{lin} + Z_{id}}$$

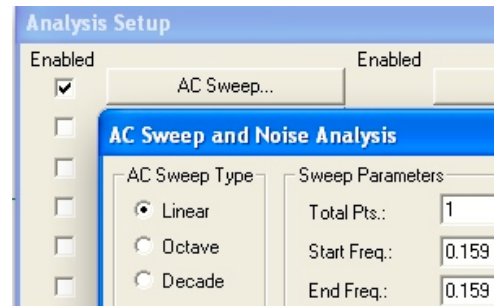
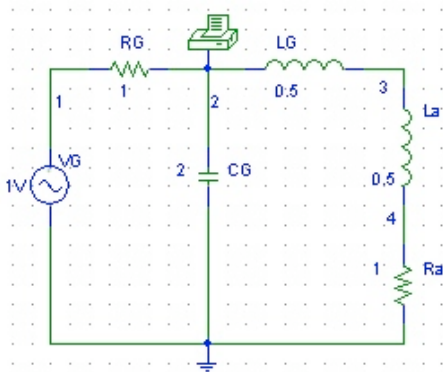
Para que sea simétrico, el cuadripolo ha de ser recíproco. Esto exige que se cumpla que $y_{12} = y_{21}$. Esta condición se cumple siempre. Además, ha de cumplirse que $y_{11} = y_{22}$. Salvo en el caso de que $R_b = 0 \Omega = R_c$, esta condición no puede satisfacerse, porque y_{11} es un parámetro imaginario puro, mientras que y_{22} tiene partes real e imaginaria.

PROBLEMA 2, apartado d

Utilizando los datos del problema, las dos primeras ecuaciones del apartado a quedan como se indica, con lo que es posible obtener los valores de las corrientes implicadas, a partir de las cuales se calcula la tensión equivalente de Thévenin.

$$\begin{cases} 1 = \mathbf{I}_G(1 - j0.5) + j0.5\mathbf{I}_a \\ 0 = j0.5\mathbf{I}_G + \mathbf{I}_a(1 + j0.5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{I}_G = 0.66 + j0.33 \text{ A} \\ \mathbf{I}_a = -j0.33 \text{ A} \end{cases}$$

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{ab} = \frac{\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_a}{j\omega C_G} = 0.33 - j0.33 \text{ V}$$



FREQ	VM(2)	VP(2)	VR(2)	VI(2)
1.590E-01	4.716E-01	-4.495E+01	3.338E-01	-3.332E-01

Al sustituir C_G por un cortocircuito toda la corriente suministrada por la fuente se va por dicho cortocircuito, con lo que la impedancia equivalente de Thévenin se calcula como sigue:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_G}{R_G} = 1 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 0.33 - j0.33 \Omega$$

Si recurrimos a los parámetros de admitancia (cuyos valores se han obtenido a partir de las expresiones del apartado c y los datos del problema), la tensión equivalente de Thévenin se calcula como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} y_{11} &= 0 \text{ S} & y_{12} &= j2 \text{ S} & y_{21} &= j2 \text{ S} & y_{22} &= 0.8 - j2.4 \text{ S} \\ \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 R_G + \mathbf{V}_1 & \mathbf{I}_1 &= \mathbf{V}_1 y_{11} + \mathbf{V}_2 y_{12} \\ \mathbf{I}_2 &= 0 \text{ A} & \mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 y_{21} + \mathbf{V}_2 y_{22} \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_G y_{22}}{y_{22} + R_G(y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21})}$$

Utilizando las mismas ecuaciones, la corriente de Norton se calcula como sigue:

$$\mathbf{V}_1 = 0 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_N = \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_G}{R_G}$$

PROBLEMA 2, apartado e

Como puede observarse, la excitación tiene dos componentes, con lo que, de acuerdo con el principio de superposición, también habrá dos componentes en la corriente y la tensión de salida. Es decir,

$$\begin{aligned}i_a(t) &= I_{aDC} + i_{aAC}(t) = I_{aDC} + I_{aAC} \cos(\omega t + \theta) \\v_2(t) &= V_{2DC} + v_{2AC}(t) = V_{2DC} + V_{2AC} \cos(\omega t + \gamma) \\p_2(t) &= i_a(t)v_2(t)\end{aligned}$$

Componente continua

Para la componente continua ($v_G(t) = V_{DC}$), las capacidades y las inductancias son, respectivamente, circuitos abiertos y cortocircuitos, con lo que la parte izquierda del circuito queda reducida a la fuente en serie con una resistencia (los primarios de los transformadores son cortocircuitos). En consecuencia,

$$I_{aDC} = I_1 = \frac{V_{DC}}{R_G} = 1 \text{ A} \quad V_{2DC} = I_{aDC} R_{cd} = 0 \text{ V}$$

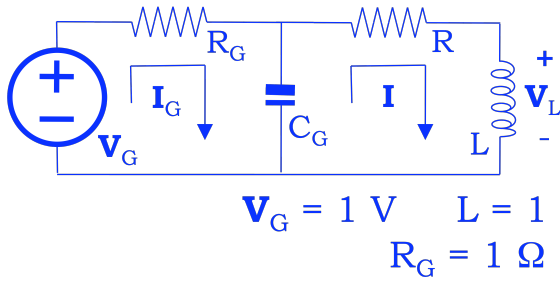
Componente sinusoidal

Para la componente sinusoidal ($V_G = 1 \text{ V}$) hay que utilizar las dos primeras ecuaciones del apartado a. Teniendo en cuenta que los datos coinciden con los del apartado e, se llega al mismo resultado con respecto a la corriente. Es decir,

$$\begin{aligned}I_{aAC} &= -j0.33 \text{ A} & \Rightarrow & i_{aAC}(t) = \text{Re}\{I_{aAC}e^{j\omega t}\} = 0.33 \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ A} \\V_{2AC} &= I_{aAC} \left[j\omega L_a + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_b + R_b + \frac{1}{j\omega C_b}} + \frac{R_c + \frac{1}{j\omega C_c} + j\omega L_b}{a^2} \right] = 0.17 - j0.33 \text{ V} & \Rightarrow & v_{2AC}(t) = \text{Re}\{V_{2AC}e^{j\omega t}\} = 0.37 \cos(\omega t - 63.43^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

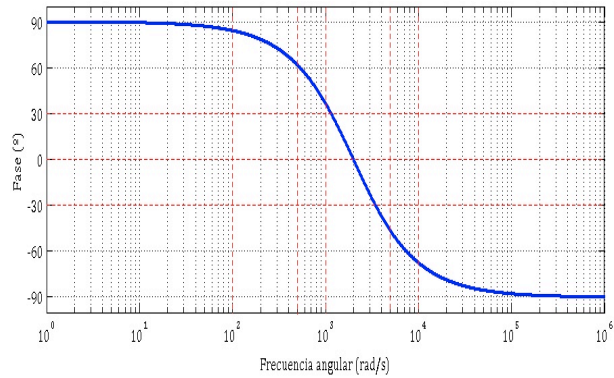
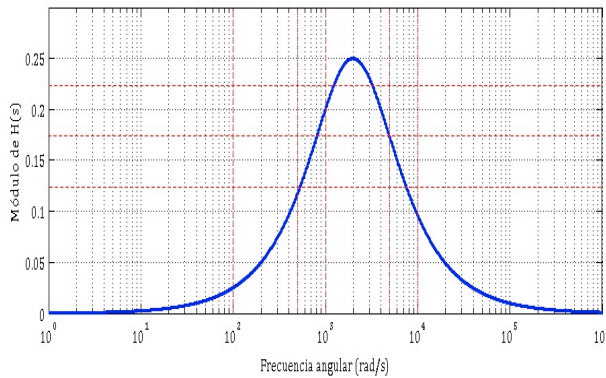
PROBLEMA 3

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.



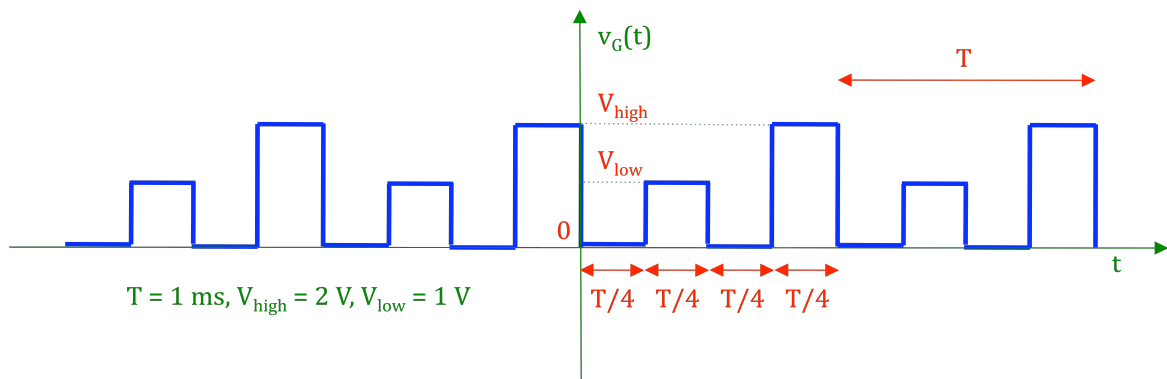
INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Junio 2010
Problema 3

Las variaciones de la amplitud y la fase con la frecuencia angular de la función de transferencia, $H(j\omega) = V_L(j\omega)/V_G(j\omega)$, son las representadas en la figura que sigue a continuación.

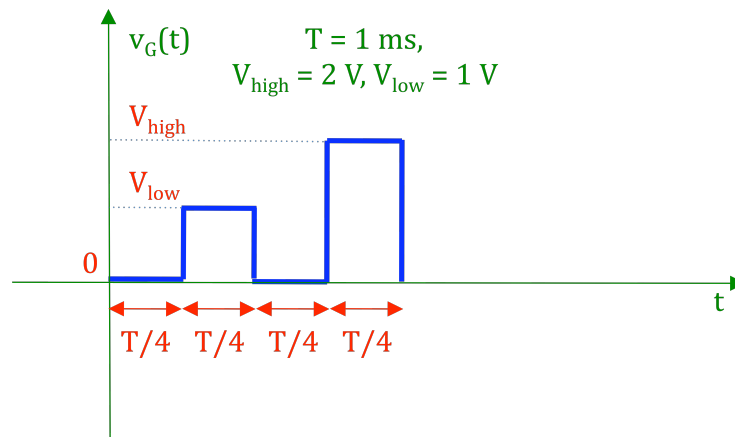


- Hallad la frecuencia angular para la que la entrada y la salida del circuito tienen la misma fase **(0.5 puntos)**.
- Como puede observarse en las figuras del enunciado, el circuito se comporta como un filtro paso banda. Hallad las frecuencias angulares que limitan la banda de paso **(0.5 puntos)**.
- Explicad cualitativamente por qué la fase de la función de transferencia tiende a -90° para frecuencias muy elevadas **(0.5 puntos)**.

- d. Suponiendo que la fuente de tensión está caracterizada por una función periódica como la representada en la figura que sigue, obtened el desarrollo en serie de Fourier de dicha función expresado en notación trigonométrica **(0.75 puntos)**.



- e. Suponiendo que la excitación es de la forma indicada en la figura que sigue, obtened su transformada de Fourier **(0.75 puntos)**.



PROBLEMA 3, apartado a

Si la entrada y la salida están en fase, esto significa que la fase de la función de transferencia es nula.

Buscando esa condición en la figura que muestra la variación de la fase se obtiene

$$\omega_0 = 2 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

PROBLEMA 3, apartado b

Las frecuencias que limitan la banda de paso son aquellas que verifican lo que se indica a continuación.

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\max} &= 0.25 \\ \omega = \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \end{cases} &\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0.175 \end{aligned}$$

En la figura que muestra la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia angular puede observarse que las frecuencias para las que dicho módulo tiene el valor indicado son

$$\omega_1 = 0.8 \times 10^3 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 5 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

PROBLEMA 3, apartado c

A frecuencias elevadas (varios órdenes de magnitud superiores a la de resonancia), las capacidades y las inductancias se comportan como cortocircuitos y circuitos abiertos, respectivamente. En consecuencia, para tales frecuencias

$$\mathbf{I}_G \approx \frac{\mathbf{V}_G}{R_G} \Rightarrow \mathbf{V}_{CG} \approx \frac{\mathbf{I}_G}{j\omega C_G} \Rightarrow \angle \mathbf{V}_{CG} \approx \angle \mathbf{I}_G - 90^\circ \approx \angle \mathbf{V}_G - \angle R_G - 90^\circ$$

Por otro lado, $\mathbf{V}_{CG}$ coincide con $\mathbf{V}_L$ ya que estamos suponiendo que la corriente que circula por la rama R-L es muy pequeña. La caída de tensión en dicha rama será prácticamente la que se tenga en la inductancia, puesto que ésta presenta una impedancia muy superior a la de la resistencia.

Es decir, entre $\mathbf{V}_G$ y $\mathbf{V}_L$ hay un desfase de aproximadamente 90° , que es el mismo que presenta la función de transferencia.

PROBLEMA 3, apartado d

La serie de Fourier se obtiene como se indica a continuación.

$$a_v = \frac{1}{T} \int_0^T v_G(t) dt = \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} V_{\text{low}} dt + \frac{1}{T} \int_{3T/4}^T V_{\text{high}} dt = \frac{V_{\text{low}}}{T} [t]_{T/4}^{T/2} + \frac{V_{\text{high}}}{T} [t]_{3T/4}^T = 0.75 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T v_G(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} V_{\text{low}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^T V_{\text{high}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \\ &= \frac{V_{\text{low}}}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{T/4}^{T/2} + \frac{V_{\text{high}}}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{3T/4}^T = -\frac{1}{k\pi} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T v_G(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} V_{\text{low}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_{3T/4}^T V_{\text{high}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \\ &= -\frac{V_{\text{low}}}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{T/4}^{T/2} - \frac{V_{\text{high}}}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{3T/4}^T = \frac{1}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{3k\pi}{2}\right) \right] - [2 + \cos(k\pi)] \end{aligned}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$$

$$v_G(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```

*** ReconstFourier ***
clear all;

T0 = 1e-3;
t = linspace(-3*T0, 3*T0, 10000);
n = 100;
Vl = 1; Vh = 2;

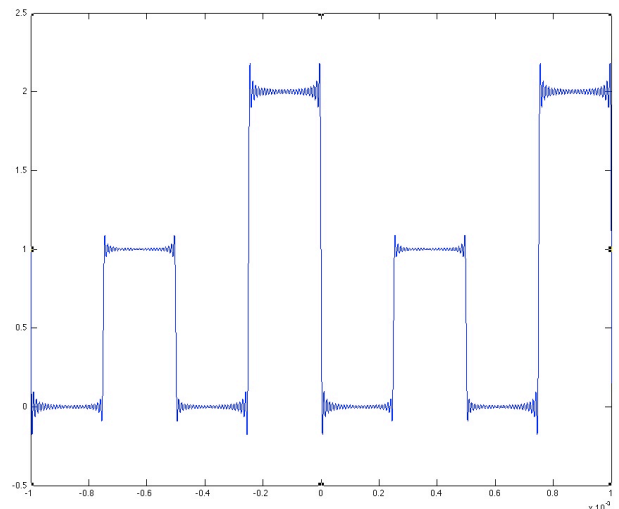
av = (Vl + Vh)/4;

vg = av;
k = 1;
while k <= n
    ak = (-Vl*sin(k*pi/2) - Vh*sin(3*k*pi/2))/(k*pi);
    bk = (Vl*cos(k*pi/2) + Vh*cos(3*k*pi/2) - Vh - Vl*cos(k*pi))/(k*pi);
    Ak = sqrt(ak^2 + bk^2);
    fk = atan2(bk, ak);
    vg = vg + Ak*cos(2*k*pi*t/T0 - fk);
    k = k + 1;
end

plot(t, vg);

clear all;

```



PROBLEMA 3, apartado e

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= A(\omega) - jB(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_G(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{T/4}^{T/2} V_{\text{low}} e^{-j\omega t} dt + \int_{3T/4}^T V_{\text{high}} e^{-j\omega t} dt = \\
 &= -\frac{V_{\text{low}}}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{T/4}^{T/2} - \frac{V_{\text{high}}}{j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{3T/4}^T = \\
 &= \frac{1}{\omega} \left\{ V_{\text{low}} \left[\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega T}{4}\right) \right] + V_{\text{high}} \left[\sin(\omega T) - \sin\left(\frac{3\omega T}{4}\right) \right] \right\} - \\
 &\quad - \frac{j}{\omega} \left\{ V_{\text{low}} \left[\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right] + V_{\text{high}} \left[\cos\left(\frac{3\omega T}{4}\right) - \cos(\omega T) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

```

1  %%% Transformada de Fourier %%%
2
3
4
5  clear all;
6
7
8
9
10 w = logspace(0, 10, 10000);
11 Vl = 1; Vh = 2; T = 1e-3;
12
13
14
15 A = (Vl*(sin(w*T/2) - sin(w*T/4)) + Vh*(sin(w*T) - sin(3*w*T/4)))/w;
16 B = (Vl*(cos(w*T/4) - cos(w*T/2)) + Vh*(cos(3*w*T/4) - cos(w*T)))/w;
17 F = A - i*B;
18 % plot(w, abs(F));
19 plot(w, 180*angle(F)/pi);
20
21
22
23
24
25 clear all;

```

