

Examen de septiembre de 2010

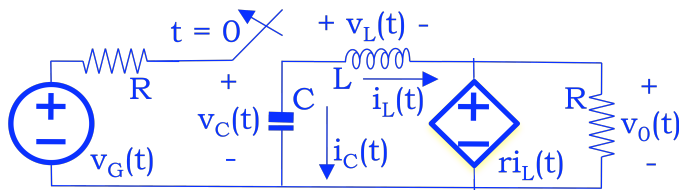
Soluciones

Análisis de circuitos
Ingeniería Técnica de Telecomunicación
Primer curso
Año académico 2009-10

Enrique Sánchez
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
UNIVERSIDAD DE VIGO

correo electrónico: enrique.sanchez@uvigo.es
Sitios web: <http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/index.html>
<http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/acGDAF.html>
<http://www.tsc.uvigo.es>
<http://www.teleco.uvigo.es>

PROBLEMA 1



INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Septiembre 2010
Problema 1

- En el circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua de valor V_G , no se producen más cambios después de la apertura del interruptor.
- Hallad los valores de v_C , i_C , v_L e i_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ **(1.2 puntos)**.
- Hallad las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de $v_C(t)$ e $i_L(t)$ para $t \geq 0$ s **(0.8 puntos)**.
- La fuente independiente continua es sustituida por otra variable con el tiempo, $v_G(t)$, la fuente dependiente es dejada en circuito abierto (entrega una corriente nula) y el interruptor permanece cerrado. En estas condiciones, hallad la función de transferencia para $t \geq 0$ s, estando aquella definida como

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_G(s)}$$

siendo $V_O(s)$ y $V_G(s)$, respectivamente, las transformadas de Laplace de $v_O(t)$ y $v_G(t)$. Si el circuito se comporta como un filtro, ¿a qué tipo corresponde? **(1.2 puntos)**.

- En las condiciones del apartado anterior, obtened la expresión temporal en régimen permanente de $v_O(t)$ para $t \geq 0$ s **(0.8 puntos)** sabiendo que $v_G(t)$ y la función de transferencia del circuito son

$$v_G(t) = 3 \cos \left[\sqrt{2} \times 10^3 (\text{rad/s})t + 45^\circ \right] \text{ V} \quad H(s) = \frac{2 \times 10^6}{s^2 + 3 \times 10^3 s + 2 \times 10^6}$$

PROBLEMA 1, apartado a

Para $t = 0^-$ s, el circuito está en régimen permanente continuo, con lo que la corriente en la capacidad y la tensión en la inductancia son nulas. Es decir,

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A} \quad v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Además, se cumplen las relaciones que se indican seguidamente.

$$V_G = [i_L(0^-) + i_C(0^-)]R + v_L(0^-) + ri_L(0^-) \quad \Rightarrow \quad i_L(0^-) = \frac{V_G}{R + r}$$

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) + ri_L(0^-) \quad \Rightarrow \quad v_C(0^-) = \frac{rV_G}{R + r}$$

Para $t = 0^+$ s, ha de mantenerse la continuidad de la tensión en la capacidad y de la corriente en la inductancia, con lo que

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{rV_G}{R + r} \quad \Rightarrow \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R + r}$$

Además, se cumplen las relaciones

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) - ri_L(0^+) = 0 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -\frac{V_G}{R + r}$$

En $t = \infty$ s el circuito está en régimen permanente continuo, lo cual significa que la capacidad y la inductancia son, respectivamente, un circuito abierto y un cortocircuito. Es decir,

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A} \quad v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

Además,

$$i_L(\infty) = -i_C(\infty) = 0 \text{ A} \quad v_C(\infty) = v_L(\infty) + ri_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

PROBLEMA 1, apartado b

En el circuito, para $t \geq 0$ s se verifican las siguientes ecuaciones:

$$i_L(t) + i_C(t) = 0 \quad (1a)$$

$$v_C(t) = v_L(t) + ri_L(t) \quad (1b)$$

Las relaciones funcionales correspondientes a los dos elementos reactivos son

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Sustituyendo la primera en (1a) y la segunda y el resultado en (1b), se obtiene

$$i_L(t) = -C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2)$$

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + rC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad (3a)$$

Sustituyendo la primera relación funcional en (1a) y la segunda en (1b), se obtiene

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + rC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0 \quad (3b)$$

Las expresiones (3) son las ecuaciones diferenciales buscadas.

PROBLEMA 1, apartado c

Sustituyendo L y C por sus correspondientes *impedancias de Laplace* (sL y $1/(sC)$, respectivamente) y aplicando análisis por nudos, se obtiene

$$\frac{V_G(s) - V_C(s)}{R} = V_C(s) \left(sC + \frac{1}{sL + R} \right) \Rightarrow V_C(s) = \frac{\frac{V_G(s)}{R}}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{sL + R}}$$

$$V_O(s) = \frac{V_C(s)R}{sL + R} \Rightarrow \frac{V_O(s)}{V_G(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)s + \frac{2}{LC}}$$

La respuesta en frecuencia del circuito se obtiene a partir del módulo de su función de transferencia, llegándose a que

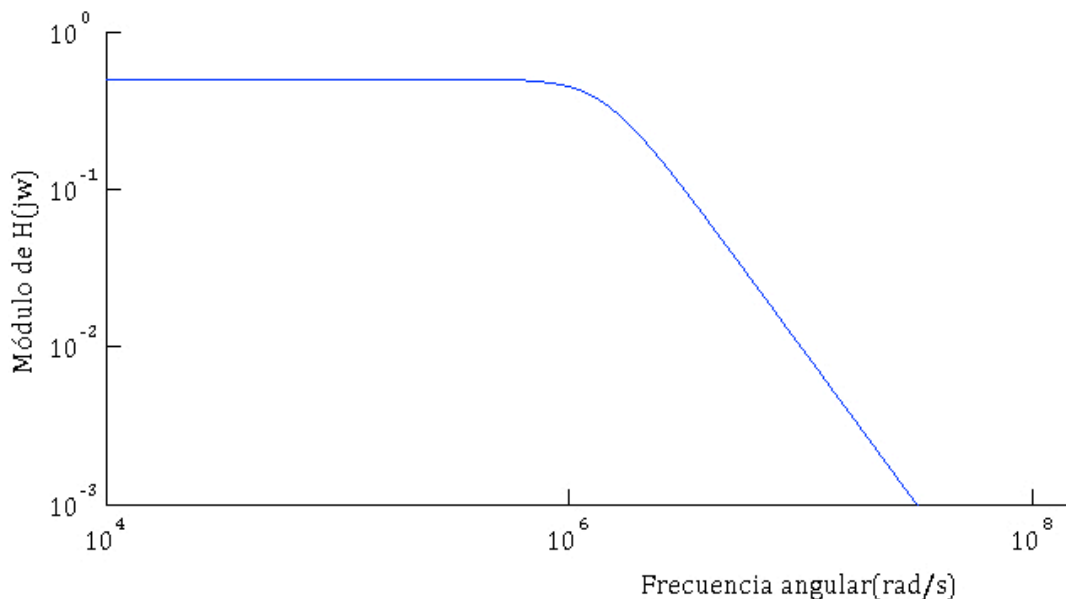
$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_G(s)} \Rightarrow |H(j\omega)| = |H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{1}{LC}}{\sqrt{\left(\frac{2}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left[\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \omega \right]^2}}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\omega \text{ intermedia} \Rightarrow \text{valor finito de } |H(j\omega)|$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0$$

Luego el circuito se comporta como un filtro paso bajo.



PROBLEMA 1, apartado d

Puesto que se pregunta por el comportamiento en régimen permanente, se prescinde de la consideración del régimen transitorio.

Por un lado, se tiene

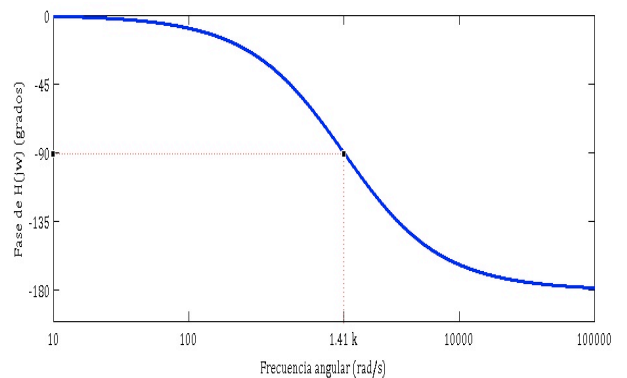
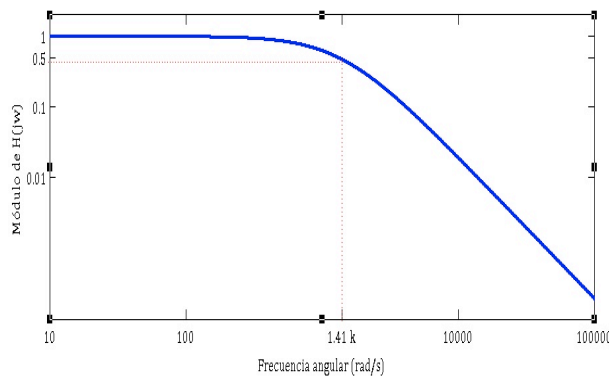
$$v_G(t) = A \cos(\omega_p t + \varphi) = 3 \cos[\sqrt{2} \times 10^3 (\text{rad/s})t + 45^\circ] \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \text{ V} \\ \omega_p = \sqrt{2} \times 10^3 \text{ rad/s} \\ \varphi = 45^\circ \end{cases}$$

Por otro,

$$|H(j\omega)| = \frac{2 \times 10^6}{\sqrt{(2 \times 10^6 - \omega^2)^2 + 9 \times 10^6 \omega^2}} \quad \theta(j\omega) = -\arctg \frac{3 \times 10^3 \omega}{2 \times 10^6 - \omega^2}$$

En consecuencia, la respuesta buscada es

$$v_O(t) = A |H(j\omega)|_{\omega=\omega_p} \cos[\omega_p t + \varphi + \theta(j\omega)] = \sqrt{2} \cos[\sqrt{2} \times 10^3 (\text{rad/s})t - 45^\circ] \text{ V}$$



PROBLEMA 2, apartado a

Reflejando impedancias, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_G \left[j\omega L_G + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b} + R_b} + R_G + j\omega L_a \right] - \mathbf{I}_a j\omega L_a \\ 0 &= -\mathbf{I}_G j\omega L_a + \mathbf{I}_a \left(j\omega L_a + \frac{1}{j\omega C_G} + \frac{R_c + \frac{1}{j\omega C_c} + j\omega L_c}{a^2} \right) \\ 0 &= \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_b \left(j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b} + R_b \right) \\ \mathbf{I}_a &= -a\mathbf{I}_c \end{aligned}$$

PROBLEMA 2, apartado b

$$\mathbf{I}_c = -\frac{\mathbf{I}_a}{a} \quad \mathbf{V}_{Cc} = \frac{\mathbf{I}_c}{j\omega C_c} = j\frac{\mathbf{I}_a}{a\omega C_c} \quad S_{Cc} = \frac{\mathbf{V}_{Cc}\mathbf{I}_c^*}{2} = -j\frac{|\mathbf{I}_a|^2}{2a^2\omega C_c}$$

PROBLEMA 2, apartado c

Utilizando la nomenclatura

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_a = -\mathbf{I}_2 \quad Z_{\text{bref}} = \frac{(\omega M)^2}{R_b + j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b}} \quad Z_{\text{cref}} = \frac{R_c + j\omega L_c + \frac{1}{j\omega C_c}}{a^2}$$

y aplicando análisis por mallas, se tiene

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1(j\omega L_G + Z_{\text{bref}} + R_G + j\omega L_a) + \mathbf{I}_2 j\omega L_a \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 j\omega L_a + \mathbf{I}_2 \left(j\omega L_a + \frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}} \right) \quad (1)$$

Las ecuaciones que definen los parámetros de impedancia son

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 z_{11} + \mathbf{I}_2 z_{12} \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1 z_{21} + \mathbf{I}_2 z_{22} \quad (2)$$

Comparando término a término (1) y (2) se obtienen los parámetros de impedancia buscados, que son

$$z_{11} = j\omega L_G + Z_{\text{bref}} + R_G + j\omega L_a \quad z_{12} = j\omega L_a$$

$$z_{21} = j\omega L_a \quad z_{22} = j\omega L_a + \frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}}$$

Para que sea simétrico, el cuadripolo ha de ser recíproco. Esto exige que se cumpla que $z_{12} = z_{21}$. Esta condición se cumple siempre. Además, ha de cumplirse que $z_{11} = z_{22}$. Esta condición puede darse con una adecuada selección de los valores de los elementos pasivos.

PROBLEMA 2, apartado d

Sustituyendo los datos del problema en las ecuaciones (1) del apartado anterior se obtiene la tensión del generador equivalente de Thévenin.

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \mathbf{I}_G(1 + j3) - \mathbf{I}_a j \\ 0 = -\mathbf{I}_G j + \mathbf{I}_a \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{I}_G = \frac{1}{2 + j3} \text{ A} \\ \mathbf{I}_a = \frac{j}{2 + j3} \text{ A} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{V}_{Th} = (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_a)j\omega L_a = \frac{5 - j}{13} \text{ V}$$

Al sustituir L_a por un cortocircuito, toda la corriente suministrada por la fuente circula por dicho cortocircuito, con lo que la corriente de Norton es

$$\mathbf{I}_N = \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega L_G + Z_{bref} + R_G} = \frac{1}{1 + j2} \text{ A}$$

con lo que la impedancia equivalente de Thévenin es

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = \frac{7 + j9}{13} \Omega$$

PROBLEMA 2, apartado e

Como puede observarse, la excitación tiene dos componentes, con lo que, de acuerdo con el principio de superposición, también habrá dos componentes en la corriente y la tensión de salida. Es decir,

$$\begin{aligned}i_{La}(t) &= I_{DC} + i_{AC}(t) = I_{DC} + I_{AC} \cos(\omega t + \theta) \\v_{La}(t) &= V_{LaDC} + v_{LaAC}(t) = V_{LaDC} + V_{LaAC} \cos(\omega t + \gamma) \\p_{La}(t) &= i_{La}(t)v_{La}(t)\end{aligned}$$

Componente continua

Para la componente continua ($v_G(t) = V_{DC}$), las capacidades y las inductancias son, respectivamente, circuitos abiertos y cortocircuitos, con lo que el circuito queda reducido a la fuente en serie con la resistencia R_G (los primarios de los transformadores son cortocircuitos). En consecuencia,

$$I_{DC} = \frac{V_{DC}}{R_G} = 2 \text{ A} \quad V_{LaDC} = 0 \text{ V, porque } L_a \text{ es un cortocircuito}$$

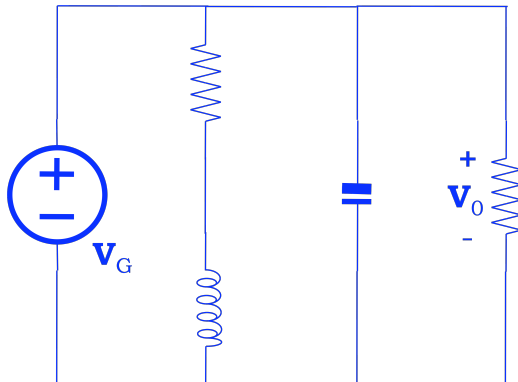
Componente sinusoidal

Para la componente sinusoidal ($V_G = V_A e^{j\varphi} = 1 \text{ V}$) hay que utilizar las dos primeras ecuaciones del apartado a. Teniendo en cuenta que los datos coinciden con los del apartado d, se llega al mismo resultado con respecto a la corriente. Es decir,

$$\begin{aligned}I_{AC} &= I_G - I_a = \frac{1-j}{2+j3} \text{ A} = I_{AC} e^{j\theta} = \frac{\sqrt{26}}{13} e^{-j168.69^\circ} \text{ A} & \Rightarrow & i_{AC}(t) = \text{Re}\{I_{AC} e^{j\omega t}\} = \frac{\sqrt{26}}{13} \cos(\omega t - 168.69^\circ) \text{ A} \\V_{LaAC} &= I_{AC} j\omega L_a = \frac{1+j}{2+j3} \text{ V} = V_{LaAC} e^{j\gamma} = \frac{\sqrt{26}}{13} e^{-j78.69^\circ} \text{ V} & \Rightarrow & v_{LaAC}(t) = \text{Re}\{V_{LaAC} e^{j\omega t}\} = \frac{\sqrt{26}}{13} \cos(\omega t - 78.69^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

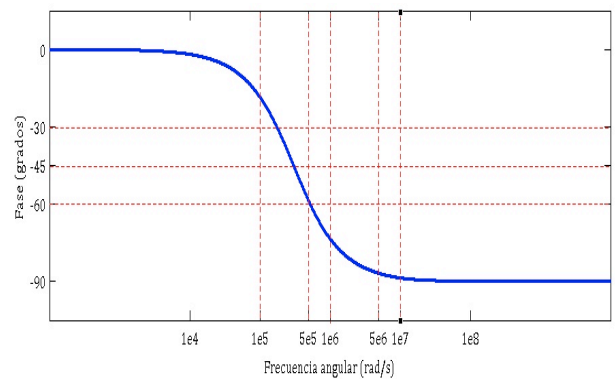
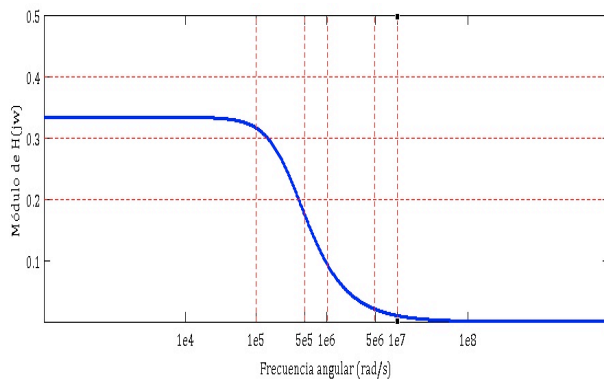
PROBLEMA 3

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.



INGENIERÍA TÉCNICA
Análisis de circuitos
Septiembre 2010
Problema 3

Las variaciones de la amplitud y la fase con la frecuencia angular de la función de transferencia, $H(j\omega) = V_0(j\omega)/V_G(j\omega)$, son las representadas en la figura que sigue.



- Hallad la frecuencia angular para la que la entrada y la salida del circuito tienen la misma fase **(0.5 puntos)**.
- Como puede observarse en las figuras del enunciado, el circuito se comporta como un filtro paso bajo. Hallad la banda de paso de dicho filtro **(0.5 puntos)**.
- Explicad cualitativamente por qué la fase de la función de transferencia tiende a 0° para frecuencias muy bajas **(0.5 puntos)**.

PROBLEMA 3, apartado a

Si la entrada y la salida están en fase, esto significa que la fase de la función de transferencia es nula.

Buscando esa condición en la figura que muestra la variación de la fase se observa que no existe ningún valor de esta magnitud (excepto el trivial, $\omega_0 = 0$ rad/s) que sea nulo, con lo que no hay ninguna frecuencia para la que se cumpla la condición indicada.

PROBLEMA 3, apartado b

La frecuencia de corte, que marca el límite superior de la banda de paso, es aquella que verifica lo que se indica a continuación.

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\max} &= 0.33 \\ \omega = \omega_c \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)| &= \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = 0.24 \end{aligned}$$

En la figura que muestra la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia angular puede observarse que la frecuencia para la que dicho módulo tiene el valor indicado es $\omega_c = 0.3$ Mrad/s. Luego la banda de paso es

$$BW = 0 - 0.3 \text{ Mrad/s}$$

PROBLEMA 3, apartado c

Para frecuencias muy bajas, la inductancia y la capacidad se comportan, respectivamente, como un cortocircuito y un circuito abierto, con lo que el circuito queda reducido a la fuente y un conjunto de resistencias. Éstas no introducen ningún desfase. En consecuencia, la salida tenderá a estar en fase con la fuente; es decir, la fase de la función de transferencia tiende a cero.

PROBLEMA 3, apartado d

La serie de Fourier se obtiene como se indica a continuación.

$$\left. \begin{array}{l} a_v = 0 \text{ V} \\ a_k = 0 \text{ V} \end{array} \right| \text{ por ser una función con simetría impar}$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v_G(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{4}{T} \int_{T/8}^{2T/8} v_G(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{4}{T} \int_{3T/8}^{4T/8} v_G(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= -\frac{2V_{\text{low}}}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{T/8}^{2T/8} + -\frac{2V_{\text{high}}}{k\pi} \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{3T/8}^{4T/8} = -\frac{2}{k\pi} \left\{ \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right] + 2 \left[\cos(k\pi) - \cos\left(\frac{3k\pi}{4}\right) \right] \right\}$$

$$A_k = b_k \quad \varphi_k = 90^\circ$$

$$v_G(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```

*** ReconstFourier ***
clear all;

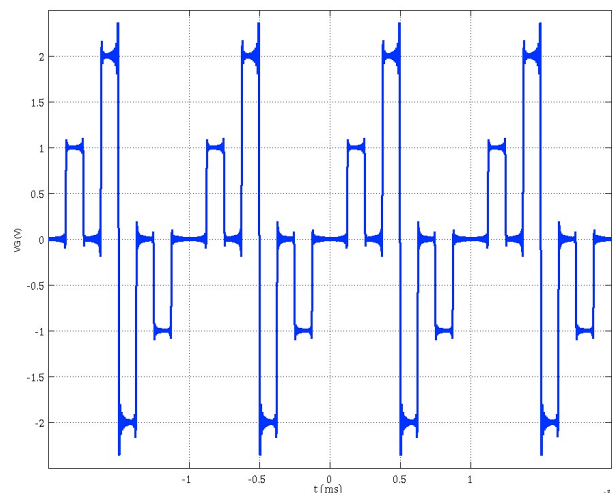
T0 = 1e-3;
t = linspace (-2*T0, 2*T0, 10000);
n = 100;
Vl = 1; Vh = 2;
av = 0;

vg = av;
k = 1;
while k <= n
    ak = 0;
    bk = (- 2*Vl/(k*pi))*(cos(k*pi/2) - cos(k*pi/4)) + (- 2*Vh/(k*pi))*(cos(k*pi) - cos(3*k*pi/4));
    Ak = sqrt(ak^2 + bk^2);
    fk = atan2(bk, ak);
    vg = vg + Ak*cos(2*k*pi*t/T0 - fk);
    k = k + 1;
end

plot(t, vg);

clear all;

```



PROBLEMA 3, apartado e

Aplicando la definición de transformada de Fourier, se tiene

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_G(t) \cos(\omega t) dt = \int_{T/4}^{T/2} V_{\text{low}} \cos(\omega t) dt = -\frac{V_{\text{low}}}{\omega} \left[\sin(\omega t) \right]_{T/4}^{T/2} = -\frac{V_{\text{low}}}{\omega} \left[\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega T}{4}\right) \right]$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v_G(t) \sin(\omega t) dt = \int_{3T/4}^T V_{\text{high}} \sin(\omega t) dt = -\frac{V_{\text{high}}}{\omega} \left[\cos(\omega t) \right]_{3T/4}^T = -\frac{V_{\text{high}}}{\omega} \left[\cos(\omega T) - \cos\left(\frac{3\omega T}{4}\right) \right]$$

$$F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

```
%%% Transformada de Fourier %%%
```

```
clear all;
```

```
w = logspace(0, 10, 10000);  
Vl = 1; Vh = 2; T = 1e-3;
```

```
A = (-Vl*(sin(w*T/2) - sin(w*T/4)) + Vh*(sin(w*T) - sin(3*w*T/4)))./w;  
B = (Vl*(cos(w*T/4) - cos(w*T/2)) + Vh*(cos(3*w*T/4) - cos(w*T)))./w;  
F = A - i*B;  
plot(w, abs(F));  
% plot(w, 180*angle(F)/pi);
```

```
clear all;
```

