

Examen de diciembre de 2010

Soluciones

Análisis de circuitos

Ingeniería Técnica de Telecomunicación

Primer curso

Año académico 2009-10

Enrique Sánchez

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación

UNIVERSIDAD DE VIGO

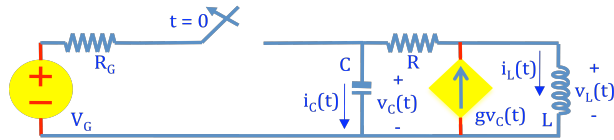
correo electrónico: enrique.sanchez@uvigo.es

Sitios web: <http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/index.html>

<http://www.tsc.uvigo.es/DAF/Investigacion/acGDAF.html>

<http://www.tsc.uvigo.es>

<http://www.teleco.uvigo.es>

PROBLEMA 1

En el circuito de la figura, en el que la fuente independiente es continua, no se producen más cambios después de la apertura del interruptor.

- Hallad los valores de v_C , i_C , v_L e i_L para $t = 0^-$; $t = 0^+$ y $t = \infty$ **(1.2 puntos)**.
- ¿Cuál es el valor máximo que puede tener g ? ¿Por qué este parámetro no puede tener un valor superior? **(0.8 puntos)**.
- La fuente independiente continua es sustituida por otra variable con el tiempo, $v_G(t)$; la fuente dependiente es dejada en circuito abierto ($g = 0$ S), y las resistencias son iguales, de valor R . En estas condiciones, y con el interruptor cerrado, hallad la función de transferencia para $t \geq 0$ s, estando aquella definida como

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)}$$

siendo $V_L(s)$ y $V_G(s)$, respectivamente, las transformadas de Laplace de $v_L(t)$ y $v_G(t)$. Si el circuito se comporta como un filtro, ¿a qué tipo corresponde? **(1.2 puntos)**.

- Obtened la expresión temporal de $v_L(t)$ para $t \geq 0$ s **(0.8 puntos)** sabiendo que $v_G(t)$ es la función escalón unitario y que la función de transferencia del circuito es

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{10^6 s}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 10^{12}}$$

PROBLEMA 1, apartado a

Para $t = 0^-$ s, la corriente en la capacidad y la tensión en la inductancia son nulas ya que el circuito está en régimen permanente continuo. Es decir,

$$i_C(0^-) = 0 \text{ A} \quad v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

Además, se cumplen las relaciones

$$\left. \begin{aligned} V_G &= [i_C(0^-) + i_L(0^-) - g v_C(0^-)] R_G + [i_L(0^-) - g v_C(0^-)] R + v_L(0^-) \\ v_C(0^-) &= [i_L(0^-) - g v_C(0^-)] R + v_L(0^-) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v_C(0^-) &= \frac{R V_G}{R_G + R} \\ i_L(0^-) &= \frac{(1 + gR) V_G}{R_G + R} \end{aligned} \right.$$

Para $t = 0^+$ s, ha de mantenerse la continuidad de la tensión en la capacidad y de la corriente en la inductancia, con lo que

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R V_G}{R_G + R} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{(1 + gR) V_G}{R_G + R}$$

Además, se cumplen las relaciones

$$i_C(0^+) = g v_C(0^+) - i_L(0^+) = -\frac{V_G}{R_G + R} \quad v_L(0^+) = v_C(0^+) + i_C(0^+) R = 0 \text{ V}$$

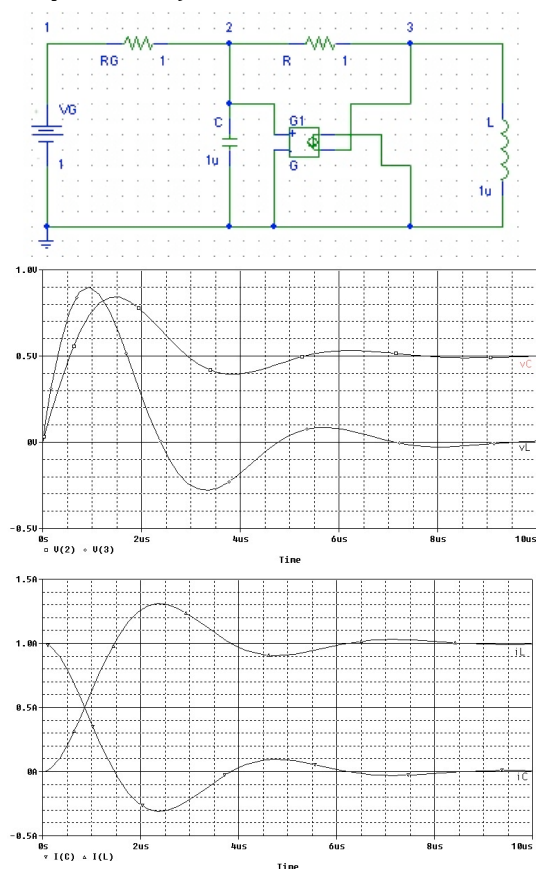
En $t = \infty$ s el circuito está en régimen permanente continuo, lo cual significa que las inductancias y las capacidades son, respectivamente, cortocircuitos y circuitos abiertos. Es decir,

$$i_C(\infty) = 0 \text{ A} \quad v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

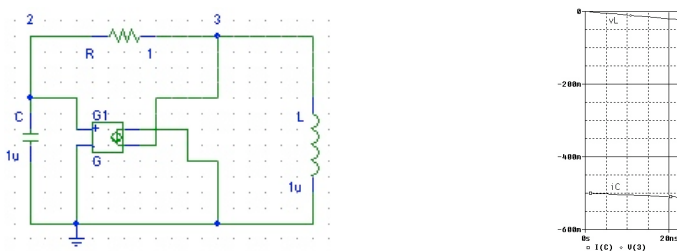
Además,

$$\left. \begin{aligned} i_L(\infty) &= g v_C(\infty) - i_C(\infty) \\ v_C(\infty) &= [i_L(\infty) - g v_C(\infty)] R + v_L(\infty) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} i_L(\infty) &= 0 \text{ A} \\ v_C(\infty) &= 0 \text{ V} \end{aligned} \right.$$

Circuito y resultados para $t = 0^+$ s (condiciones iniciales nulas, resistencias y ganancia unidad). El tiempo final del análisis corresponde a $t = 0$ s (ya se ha alcanzado el régimen permanente).



Condiciones en $t = 0^+$ s (0 s). Se utilizan como condiciones iniciales las finales del análisis anterior.



PROBLEMA 1, apartado b

En el circuito, para $t \geq 0$ s se verifican las siguientes ecuaciones:

$$gv_C(t) = i_C(t) + i_L(t) \quad v_L(t) = v_C(t) + i_C(t)R$$

Las relaciones funcionales correspondientes a los dos elementos reactivos son

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Manipulando estas relaciones, se obtiene

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + (RC - Lg) \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = LC \\ b = RC - Lg \\ c = 1 \end{cases}$$

Se habrían obtenido los mismos coeficientes de la ecuación característica si se hubiera partido de $i_L(t)$ en lugar de hacerlo de $v_C(t)$.

Las raíces de la ecuación característica se obtienen a partir de la fórmula

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b < 0$, las raíces son reales y positivas o son complejas con parte real positiva. Eso significa que los términos de la forma $Ae^{s_1 t}$ o similares que aparecen en las expresiones temporales de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ tienden a hacerse infinitos a medida que t crece, lo cual causa la destrucción del circuito. Por consiguiente, ha de cumplirse

$$b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad g \leq \frac{RC}{L}$$

Obsérvese que, si g tiene justamente el valor que anula el coeficiente b , las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras, con lo que, para $t \geq 0$ s, el circuito soporta una señal sinusoidal pura. La energía necesaria para mantenerla proviene de la almacenada en los elementos reactivos debido a la circunstancia de que sus condiciones iniciales no son nulas.

PROBLEMA 1, apartado c

Sustituyendo L y C por sus correspondientes *impedancias de Laplace* (sL y 1/(sC), respectivamente) y aplicando análisis por nudos, se obtiene

$$\frac{V_G(s) - V_C(s)}{R} = V_C(s) \left(sC + \frac{1}{R + sL} \right) \Rightarrow V_C(s) = \frac{\frac{V_G(s)}{R}}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R + sL}}$$

$$V_L(s) = \frac{V_C(s)sL}{R + sL} \Rightarrow \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) + \frac{2}{LC}}$$

La respuesta en frecuencia del circuito se obtiene a partir del módulo de su función de transferencia, llegándose a que

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} \Rightarrow |H(j\omega)| = |H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{2}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left[\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \omega \right]^2}}$$

$\omega \rightarrow 0 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0$
 $\omega \text{ intermedia} \Rightarrow \text{valor finito de } |H(j\omega)|$
 $\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)| \rightarrow 0$

Luego el circuito se comporta como un filtro paso banda.

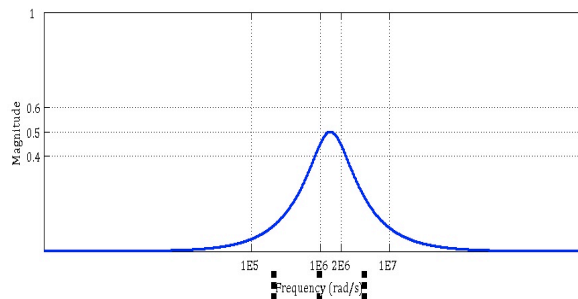
```

*** Respuesta en frecuencia ***
clear all;

w = logspace (0, 18, 10000);
% fregs([2 1e12], [2 4.5*1e6 3*1e12], w);
% hold on;
% fregs ([2*1e6 1e12], [1 4.5*1e6 3*1e12], w);
% hold on;
% fregs ([1e6 0], [1 2*1e6 1e12], w);
% hold on;
% fregs ([1 1e6 0], [3 3*1e6 1e12], w);
% fregs ([1e12 0], [1 2*1e6 2*1e12], w);
hold off;
clear all;

```

R = 1 Ω, L = 1 μH, C = 1 μF

**PROBLEMA 1, apartado d**

$$v_G(t) = u(t) \Rightarrow V_G(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_L(s) = H(s)V_G(s) = \frac{10^6}{s^2 + 2 \times 10^6 s + 10^6} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$s^2 + 2 \times 10^6 s + 10^6 = 0 \Rightarrow s_1 = -10^6 s^{-1} \quad s_2 = -10^6 s^{-1}$$

$$V_L(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{(s + s_2)^2} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 0 \text{ V/s} \\ K_2 = 10^6 \text{ V/s}^2 \end{cases}$$

En consecuencia,

$$v_L(t) = 10^6 t e^{-t} \text{ V (t en } \mu\text{s)}$$

```

*** Fracciones simples ***
clear all;

P1 = [1e6];
P2 = [1 2*1e6 1e12];

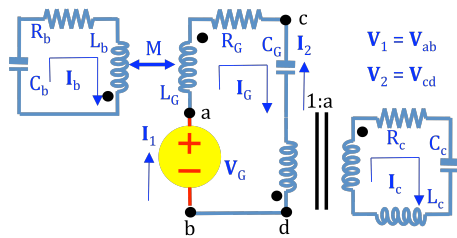
[num, raices, cociente] = residue (P1, P2)

clear all;

```

num =
0
1000000
raices =
-1000000
-1000000
cociente =
[]

PROBLEMA 2



El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

- Escribid un sistema algebraico de tres ecuaciones a partir del cual sea posible determinar los valores de I_G , I_b e I_c . No obtengáis los valores de estos fasores **(0.6 puntos)**.
- Con los valores indicados más abajo, obtened la potencia reactiva en la fuente **(0.6 puntos)**.

$$\begin{array}{lll} \omega M = 0.5 \, \Omega & V_G = j10 \, \text{V} & a = 3 \\ R_b = 0.25 \, \Omega & R_G = 1 \, \Omega & R_c = 72 \, \Omega \\ \omega L_b = 5 \, \Omega & \omega L_G = 1 \, \Omega & \omega L_c = 0.5 \, \Omega \\ \omega C_b = 0.2 \, \text{S} & \omega C_G = 1 \, \text{S} & \omega C_c = 2 \, \text{S} \end{array}$$

- Obtened en forma algebraica (es decir, sin utilizar los datos numéricos del apartado anterior) los parámetros de transmisión del cuadripolo **abcd**; en lo posible, agrupad impedancias sin desarrollar los cálculos hasta obtener expresiones finales. ¿Puede ser simétrico este cuadripolo?; si puede serlo, no calculéis las condiciones que ha de cumplir **(0.6 puntos)**.
- Suponiendo que los elementos del circuito tienen los valores indicados en el apartado b, calculad el equivalente de Thévenin entre los puntos **c** y **d**. Podéis hacerlo considerando el circuito tal y como ha sido dibujado o bien a partir del conocimiento de los parámetros de transmisión **(0.6 puntos)**.

- Suponiendo que los elementos del circuito tienen los valores indicados más abajo, obtened la expresión temporal de la potencia en la rama **cd**. Utilizad aproximaciones matemáticas razonables y agrupaciones de impedancias siempre que sea posible **(0.6 puntos)**.

$$v_G(t) = V_{DC} + V_{ACb} \cos(\omega_b t + \varphi_b) + V_{ACc} \cos(\omega_c t + \varphi_c)$$

$V_{ACb} = 1 \, \text{V}$	$\omega_b = 1 \, \text{Mrad/s}$	$\varphi_b = 0^\circ$	$V_{DC} = 1 \, \text{V}$	$V_{ACc} = 1 \, \text{V}$	$\omega_c = 1 \, \text{Grad/s}$	$\varphi_c = 0^\circ$
$R_b = 0.25 \, \Omega$		$L_b = 1 \, \text{nH}$		$C_b = 1 \, \text{nF}$		$M = 0.5 \, \text{nH}$
$R_c = 4 \, \Omega$		$L_c = 4 \, \mu\text{H}$		$C_c = 0.25 \, \mu\text{F}$		$a = 2$
		$L_G = 1 \, \text{nH}$	$R_G = 1 \, \Omega$	$C_G = 1 \, \text{nF}$		

PROBLEMA 2, apartado a

Reflejando impedancias, se obtiene

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left[j\omega L_G + \frac{(\omega M)^2}{R_b + j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b}} + R_G + \frac{1}{j\omega C_G} + \frac{R_c + j\omega L_c + \frac{1}{j\omega C_c}}{a^2} \right]$$

$$0 = \mathbf{I}_G j\omega M + \mathbf{I}_b \left(R_b + j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b} \right)$$

$$\mathbf{I}_G = -a \mathbf{I}_c$$

PROBLEMA 2, apartado b

Sustituyendo los datos del enunciado en las ecuaciones del apartado a, se obtiene

$$\mathbf{I}_G = j \text{ A} \quad S_G = -\frac{\mathbf{V}_G \mathbf{I}_G^*}{2} = -5 \text{ VA} \quad Q_G = \text{Im}\{S_G\} = 0 \text{ VAR}$$

PROBLEMA 2, apartado c

La impedancia reflejada en el primario del transformador lineal es

$$Z_{\text{bref}} = \frac{(\omega M)^2}{R_b + j\omega L_b + \frac{1}{j\omega C_b}}$$

El circuito se caracteriza por las expresiones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{I}_2(j\omega L_G + Z_{\text{bref}} + R_G) \quad \mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_2 \quad (1)$$

Las ecuaciones que definen los parámetros de transmisión son

$$\mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 - b\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_1 = c\mathbf{V}_2 - d\mathbf{I}_2 \quad (2)$$

Comparando término a término (1) y (2) se obtienen los parámetros de transmisión buscados, que son

$$a=1 \quad b=j\omega L_G + Z_{\text{bref}} + R_G \quad c=0 \text{ S} \quad d=1$$

Para que sea simétrico, el cuadripolo ha de ser recíproco. Esto exige que se cumpla que $ad - bc = 1$. Esta condición se cumple siempre. Además, ha de cumplirse que $a = d$, que también se cumple siempre. Luego el cuadripolo es simétrico.

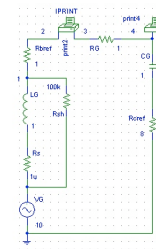
PROBLEMA 2, apartado d

Teniendo en cuenta la similitud con el apartado b (con lo que $\mathbf{I}_G = j \text{ A}$) y definiendo la impedancia reflejada en el transformador ideal como

$$Z_{\text{cref}} = \frac{R_c + j\omega L_c + \frac{1}{j\omega C_c}}{a^2}$$

se tiene

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_{\text{cd}} = \mathbf{I}_G \left(\frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}} \right) = 1 + j8 \text{ V}$$



FREQ	VM(4)	VP(4)	VR(4)	VI(4)
1.592E-01	8.062E+00	8.287E+01	1.000E+00	8.000E+00

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)	IR(V_PRINT2)	II(V_PRINT2)
1.592E-01	1.000E+00	9.000E+01	5.661E-05	1.000E+00

Al sustituir C_G y Z_{cref} por un cortocircuito cambia la corriente que circula por el circuito, con lo que la impedancia equivalente de Thévenin se calcula como sigue:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_G}{j\omega L_G + Z_{\text{bref}} + R_G} = 2 + j4 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad Z_{\text{Th}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{Th}}}{\mathbf{I}_N} = 1.7 + j0.6 \Omega$$

Si recurrimos a los parámetros de transmisión (cuyos valores se han obtenido a partir de las expresiones del apartado c y los datos del problema), la tensión equivalente de Thévenin se calcula como se indica a continuación.

$$a=1 \quad b=2 + j \Omega \quad c=0 \text{ S} \quad d=1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G = \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}} \right) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathbf{V}_1 = a\mathbf{V}_2 - b\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_1 = c\mathbf{V}_2 - d\mathbf{I}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_2 = \frac{\left(\frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}} \right) \mathbf{V}_G}{a \left(\frac{1}{j\omega C_G} + Z_{\text{cref}} \right) + b}$$

Utilizando las mismas ecuaciones con la condición $\mathbf{V}_2 = 0 \text{ V}$, la corriente de Norton es $\mathbf{I}_N = \mathbf{V}_G/b$.

PROBLEMA 2, apartado e

Como puede observarse, la excitación tiene tres componentes, con lo que, de acuerdo con el principio de superposición, también habrá tres componentes en la corriente y la tensión de salida. Es decir,

$$\begin{aligned} i_G(t) &= I_{GDC} + I_{GACb} \cos(\omega_b t + \theta_b) + I_{GACc} \cos(\omega_c t + \theta_c) \\ v_2(t) &= V_{2DC} + V_{2ACb} \cos(\omega_b t + \gamma_b) + V_{2ACc} \cos(\omega_c t + \gamma_c) \\ p_2(t) &= i_G(t) v_2(t) \end{aligned}$$

Componente continua

Para las componentes continuas ($v_G(t) = V_{DC}$), las capacidades y las inductancias son, respectivamente, circuitos abiertos y cortocircuitos, con lo que no hay corriente en ninguna parte del circuito y toda la tensión de la fuente cae en bornas de C_G . Es decir,

$$I_{GDC} = 0 \text{ A} \quad V_{2DC} = V_{DC} = 1 \text{ V}$$

Componentes sinusoidales

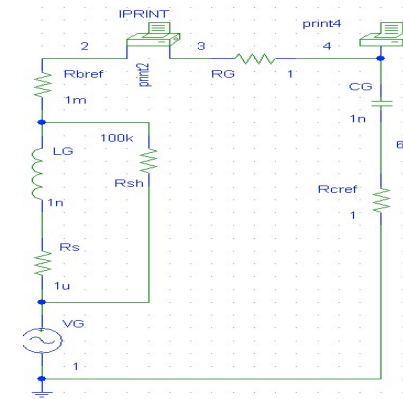
Para cualquiera de las componentes sinusoidales podemos utilizar un tratamiento único, resumido en las siguientes expresiones:

$$I_{GAC} = \frac{V_{AC}}{j\omega L_G + Z_{bref} + R_G + \frac{1}{j\omega C_G} + Z_{cref}} \quad V_{2AC} = I_{GAC} \left(\frac{1}{j\omega C_G} + Z_{cref} \right)$$

Excitación de frecuencia angular ω_b

Para esta excitación se tiene la siguiente situación:

$$\begin{aligned} I_{GACb} &\approx \frac{1}{j10^{-3} + 0 + 1 - j10^3 + 1} \approx j10^{-3} \text{ A} \Rightarrow \begin{cases} I_{GACb} = 1 \text{ mA} \\ \theta_b = 90^\circ \end{cases} \\ V_{2ACb} &\approx j10^{-3}(-j10^3 + 1) \approx 1 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} V_{2ACb} = 1 \text{ V} \\ \gamma_b = 0^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

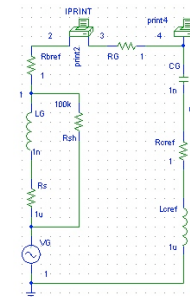


FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)	IR(V_PRINT2)	II(V_PRINT2)
1.590E+05	9.990E-04	8.989E+01	1.997E-06	9.990E-04
FREQ	VM(4)	VP(4)	VR(4)	VI(4)
1.590E+05	1.000E+00	-5.730E-02	1.000E+00	-1.000E-01

Excitación de frecuencia angular ω_c

Para esta excitación se tiene la siguiente situación:

$$\begin{aligned} I_{GACc} &\approx \frac{1}{j + 1 + 1 - j + 1 + j10^3} \approx -j10^{-3} \text{ A} \Rightarrow \begin{cases} I_{GACc} = 1 \text{ mA} \\ \theta_b = -90^\circ \end{cases} \\ V_{2ACc} &\approx -j10^{-3}(-j + 1 + j10^3) \approx 1 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} V_{2ACc} = 1 \text{ V} \\ \gamma_c = 0^\circ \end{cases} \end{aligned}$$



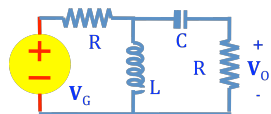
FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)	IR(V_PRINT2)	II(V_PRINT2)
1.590E+08	1.001E-03	-8.983E+01	3.006E-06	-1.001E-03
FREQ	VM(4)	VP(4)	VR(4)	VI(4)
1.590E+08	9.990E-01	1.146E-01	9.990E-01	1.999E-03

En consecuencia,

$$\begin{aligned} i_G(t) &= \cos(\omega_b t + 90^\circ) + \cos(\omega_c t - 90^\circ) \text{ mA} \\ v_2(t) &= 1 + \cos(\omega_b t) + \cos(\omega_c t) \text{ V} \\ p_2(t) &= i_G(t) v_2(t) \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

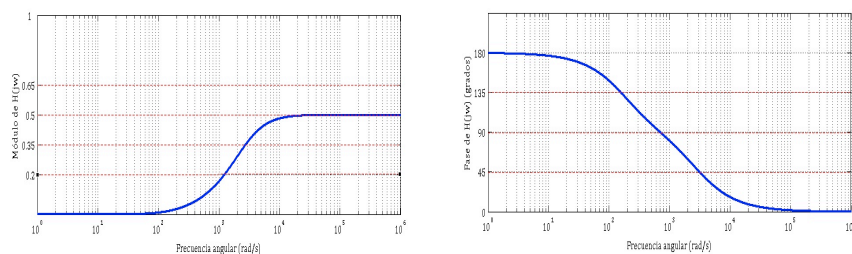
El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente.



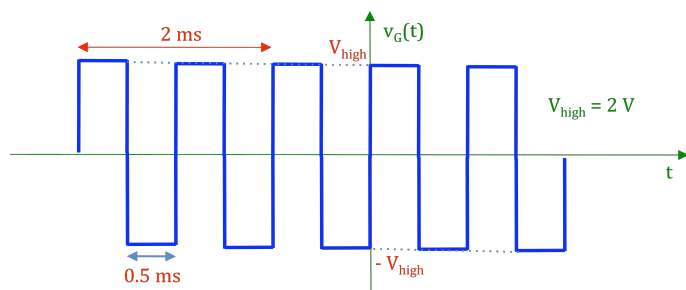
$$V_G = 1 \text{ V}$$

$$R = 1 \Omega \quad L = 1 \text{ mH} \quad C = 1 \text{ mF}$$

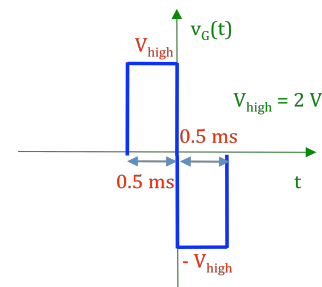
Las variaciones de la amplitud y la fase con la frecuencia angular de la función de transferencia, $H(j\omega) = V_0(j\omega)/V_G(j\omega)$, son las representadas en la figura que sigue a continuación.



- Hallad la frecuencia angular de resonancia **(0.5 puntos)**.
- Como puede observarse en las figuras del enunciado, el circuito se comporta como un filtro paso alto. Hallad las frecuencias angulares que limitan la banda de paso **(0.5 puntos)**.
- Explicad cualitativamente por qué el módulo de la función de transferencia tiende a 0.5 para frecuencias muy elevadas **(0.5 puntos)**.
- Suponiendo que la fuente de tensión está caracterizada por una función periódica como la representada en la figura que sigue, obtened el desarrollo en serie de Fourier de dicha función expresado en notación trigonométrica **(0.75 puntos)**.



- Suponiendo que la excitación es de la forma indicada en la figura que sigue, obtened su transformada de Fourier **(0.75 puntos)**.



PROBLEMA 3, apartado a

La frecuencia de resonancia está dada por la condición de que sea nula la fase de la función de transferencia, ya que esto significa que la entrada y la salida están en fase y, por consiguiente, que la impedancia total del circuito es puramente resistiva.

Dado que, como puede verse en la figura que muestra la variación de la fase, no existe ningún valor de esta magnitud (excepto el trivial, que corresponde a una frecuencia angular infinita) que sea nulo, el circuito carece de frecuencia de resonancia.

PROBLEMA 3, apartado b

Las frecuencias que limitan la banda de paso son aquellas que verifican lo que se indica a continuación.

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\max} &= 0.5 \\ \omega = \omega_c \Rightarrow |H(j\omega)| &= \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = 0.35 \end{aligned}$$

En la figura que muestra la variación del módulo de la función de transferencia con la frecuencia angular puede observarse que la frecuencia para la que dicho módulo tiene el valor indicado es $\omega_c = 3 \text{ krad/s}$. Luego la banda de paso es

$$BW = 3 \text{ krad/s} - \infty \text{ rad/s}$$

PROBLEMA 3, apartado c

Para frecuencias elevadas la inductancia tiende a comportarse como un circuito abierto, con lo que la corriente proporcionada por la fuente circula únicamente por las resistencias y la capacidad. A su vez, ésta tiende a comportarse como un cortocircuito, con lo que el circuito constituye un divisor de tensión con ambas resistencias iguales. En tales condiciones, la tensión en la resistencia de salida tiende a ser la mitad de la proporcionada por la fuente.

PROBLEMA 3, apartado d

Se trata de una función con simetría impar, de periodo $T = 1$ ms. Los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier se obtienen como se indica a continuación.

$$a_v = 0 \text{ V} \quad a_k = 0 \text{ V}$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v_G(t) \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} V_{\text{high}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{4}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)]$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}$$

$$v_G(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```

*** ReconstFourier ***
clear all;

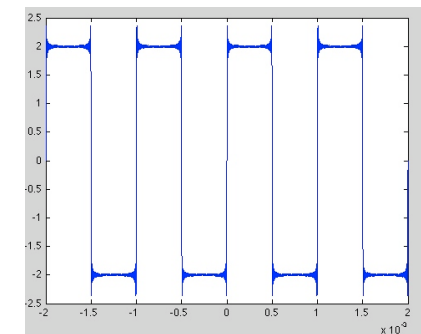
T0 = 1e-3;
t = linspace (-2*T0, 2*T0, 10000);
n = 100;
Vl = 1; Vh = 2;
av = 0;

vg = av;
k = 1;
while k <= n
    ak = 0;
    bk = 4/(k*pi)*(1 - cos(k*pi));
    Ak = sqrt(ak^2 + bk^2);
    fk = atan2(bk, ak);
    vg = vg + Ak*cos(2*k*pi*t/T0 - fk);
    k = k + 1;
end

plot(t, vg);

clear all;

```



PROBLEMA 3, apartado e

La función es impar, con lo que

$$A(\omega) = 0$$

$$B(\omega) = 2 \int_0^{\infty} v_G(t) \sin(\omega t) dt = -\frac{2V_{\text{high}}}{\omega} [\cos(\omega t)]_0^{T/2} = \frac{4}{\omega} \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) - 1 \right]$$

$$F(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

```

%%% Transformada de Fourier %%%

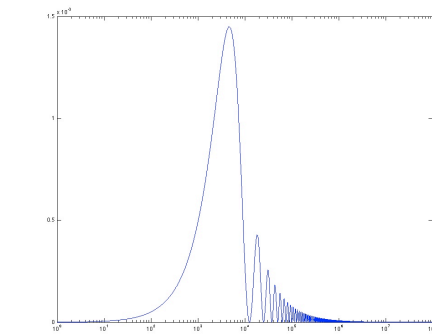
clear all;

w = logspace(0, 10, 10000);
Vl = 1; Vh = 2; T = 1e-3;

A = 0;
B = 4*(cos(w*T/2) - 1)./w;
F = A - i*B;
plot(w, abs(F));
% plot(w, 180*angle(F)/pi);

clear all;

```



1