

UNIVERSIDAD DE VIGO

Escuela de Ingeniería de Telecomunicación

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Primer curso

Análisis de circuitos lineales

Examen de 28 mayo 2012

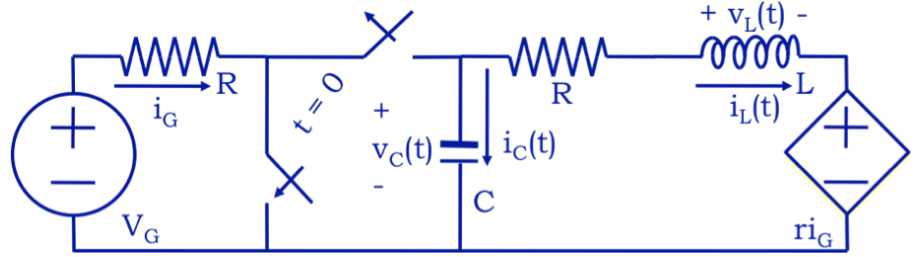
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Escuela de Ingeniería de Telecomunicación

UNIVERSIDAD DE VIGO

Problema 1

En el circuito de la figura la fuente es continua. Los valores de V_G y r son positivos y no nulos.



a Obtened los **valores** de v_C , i_C , i_L y v_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ (**1.2 puntos**).

Para $t \leq 0$ s la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto. En consecuencia, $v_L(0^-) = 0$ V e $i_C(0^-) = 0$ A. Además,

$$\left. \begin{aligned} i_G(0^-) &= i_C(0^-) + i_L(0^-) \\ V_G &= Ri_G(0^-) + Ri_L(0^-) + v_L(0^-) + ri_G(0^-) \\ v_C(0^-) &= V_G - Ri_G(0^-) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} i_L(0^-) &= \frac{V_G}{2R + r} \\ v_C(0^-) &= \frac{R + r}{2R + r} V_G \end{aligned} \right.$$

En $t=0$ s la corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden experimentar cambios bruscos en sus valores. En consecuencia,

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{2R + r} \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = \frac{R + r}{2R + r} V_G$$

Además, en el circuito se verifican las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} i_G(t) &= \frac{V_G - 0}{R} \\ v_C(t) &= Ri_L(t) + v_L(t) + ri_G(t) \\ i_C(t) &= -i_L(t) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_L(t) &= -\frac{r}{R} \left(\frac{R + r}{2R + r} \right) V_G \\ i_C(t) &= -\frac{V_G}{2R + r} \end{aligned} \right.$$

Para $t=\infty$ s la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto. En consecuencia, $v_L(\infty) = 0$ V e $i_C(\infty) = 0$ A. Además,

$$\left. \begin{aligned} i_G(\infty) &= \frac{V_G - 0}{R} \\ v_C(\infty) &= Ri_L(\infty) + v_L(\infty) + ri_G(\infty) \\ i_C(\infty) &= -i_L(\infty) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} i_L(\infty) &= 0 \text{ A} \\ v_C(\infty) &= \frac{r}{R} V_G \end{aligned} \right.$$

b Obtened las ecuaciones diferenciales de i_L y v_C para $t \geq 0$ s (**0.3 puntos**).

En el periodo considerado, en el circuito se verifican las relaciones

$$\left. \begin{aligned} i_G(t) &= \frac{V_G - 0}{R} \\ v_C(t) &= Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + ri_G(t) \\ C \frac{dv_C(t)}{dt} &= -i_L(t) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) &= 0 \\ LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) &= \frac{r}{R} V_G \end{aligned} \right|$$

c Si $i_L(t \geq 0) = i_L(\infty) + Ae^{-t} + Be^{-0.25t}$ (t en s), ¿cómo es la **respuesta** de la parte del circuito que contiene los elementos reactivos? ¿Cuánto valen las **raíces de la ecuación característica**? ¿Cuánto valen el **coeficiente de amortiguamiento** y la **frecuencia angular de resonancia**? (0.3 puntos).

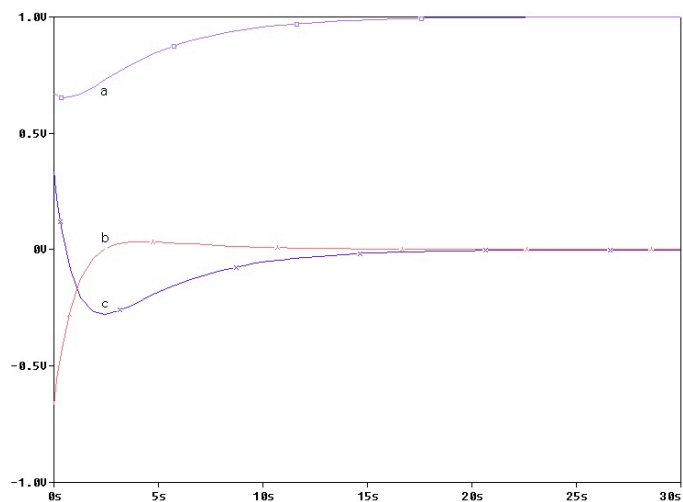
La forma de la expresión es la que corresponde a la respuesta sobreamortiguada.

En la respuesta sobreamortiguada las raíces de la ecuación característica son los coeficientes de los exponentes de la expresión temporal. Luego $s_{1,2} = -1, -0.25 \text{ s}^{-1}$.

Las raíces de la ecuación característica están relacionadas directamente con el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia. Es decir,

$$\left. \begin{aligned} -1 \text{ s} &= s_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ -0.25 \text{ s} &= s_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} \alpha &= \frac{s_1 + s_2}{2} = -0.625 \text{ s}^{-1} \\ \omega_0 &= \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2} = 0.5 \text{ rad/s} \end{aligned} \right|$$

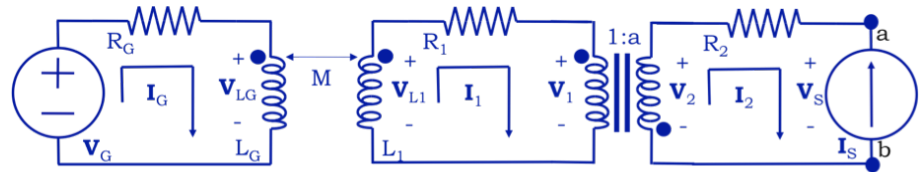
d ¿Cuál de las curvas de la figura corresponde a $v_C(t)$? (0.2 puntos).



En $t=\infty$ la tensión en la capacidad no puede ser nula, tal y como se desprende de la ecuación diferencial correspondiente a esta variable. Además, teniendo en cuenta que en ese momento no circula corriente por los elementos reactivos, dicha tensión ha de ser igual a la proporcionada por la fuente dependiente, que no es nula. La única curva de la figura en la que la tensión final no es nula es la marcada como *a*.

Problema 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal a una frecuencia angular ω .



Se suponen conocidas las características de todos los elementos del circuito

a Escribid **tres ecuaciones** que permitan calcular las corrientes de malla (**0.9 puntos**).

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G(R_G + j\omega L_G) - \mathbf{I}_1 j\omega M \quad \mathbf{I}_1 = -a\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_S$$

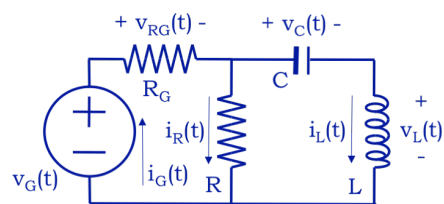
b Calculad la **impedancia** que hay que colocar entre a y b para que en ella se disipe la **máxima potencia media posible** (**0.6 puntos**).

Dicha impedancia es el complejo conjugado de la impedancia equivalente de Thévenin entre los puntos a y b . Dado que no hay fuentes dependientes en el circuito, la impedancia equivalente se obtiene desactivando las independientes (la de tensión se sustituye por un cortocircuito y la de corriente, por un circuito abierto) y calculando la impedancia total entre dichos puntos. Utilizando reflexión de impedancias se tiene

$$Z_{ab} = Z_{Th}^* = \left\{ \left[\frac{(\omega M)^2}{R_G + j\omega L_G} + j\omega L_1 + R_1 \right] a^2 + R_2 \right\}^*$$

Problema 3

Obtened la **expresión temporal** de $v_C(t)$ (**1.5 puntos**).



$$v_G(t) = V_D + V_A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$V_D = 2 \text{ V}$$

$$V_A = 2 \text{ V}$$

$$\omega = 4 \text{ Mrad/s}$$

$$\varphi = 0^\circ$$

$$R_G = 1 \Omega$$

$$R = 1 \Omega$$

$$L = 0.25 \mu\text{H}$$

$$C = 0.25 \mu\text{F}$$

El circuito soporta simultáneamente dos excitaciones, por lo que hay que aplicar el principio de superposición.

Excitación sinusoidal.

Dado que, con los valores del enunciado, se tiene

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \, \Omega$$

el conjunto LC serie se comporta como un cortocircuito por el que circula toda la corriente entregada por el generador.

El fasor representativo de la tensión del generador es

$$\mathbf{V}_A = V_A e^{j\varphi} = 2 \, V$$

con lo que

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_A}{R_G + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = 2 \, A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_{CA} = \frac{\mathbf{I}_L}{j\omega C} = -j2 \, V$$

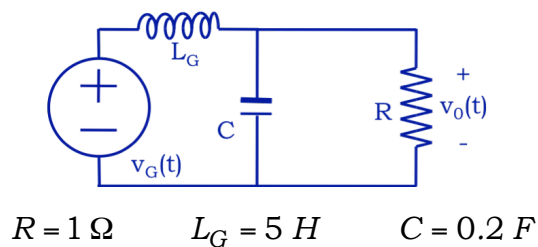
Excitación continua.

La capacidad es un circuito abierto, con lo que toda la corriente proveniente del generador circula por la resistencia R . Dado que la inductancia es un cortocircuito, la tensión en el conjunto LC es prácticamente la correspondiente a la capacidad. Por otro lado, dicha tensión es la misma que cae en R , ya que este elemento se encuentra en paralelo con tal capacidad. Es decir,

$$V_{CD} = I_R R = \frac{V_D R}{R_G + R} = 1 \, V$$

Tensión total.

$$v_C(t) = V_{CD} + \operatorname{Re}\left\{\mathbf{V}_{CA} e^{j\omega t}\right\} = 1 + 2 \cos\left[\left(4 \times 10^6 t - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{rad}\right] V \, (t \text{ en } s)$$

Problema 4

a Siendo $V_G(s)$ y $V_0(s)$ las transformadas de Laplace, respectivamente, de $v_G(t)$ y $v_0(t)$, obtened la **función de transferencia**, $H(s) = V_0(s)/V_G(s)$, del circuito de la figura **(0.6 puntos)**.

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{\frac{\frac{R}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}}{sL_G + \frac{\frac{R}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}} = \frac{\frac{R}{sRC + 1}}{sL_G + \frac{R}{sRC + 1}} = \frac{\frac{1}{L_G C}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{L_G C}} = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}$$

b Suponiendo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_G(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

obtened la **función de ponderación**, también llamada **respuesta al impulso**, $h(t)$ (**0.6 puntos**).

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

$$K_1 = \left[\frac{(s+1)N(s)}{D(s)} \right]_{s=-1} = 1 \quad K_2 = \left[\frac{(s+2)N(s)}{D(s)} \right]_{s=-2} = -1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

c Suponiendo que la función de transferencia es la indicada en el apartado anterior y que $v_G(t) = V_G = 5 \text{ V}$, obtened la expresión temporal de $v_0(t)$ en régimen permanente (**0.8 puntos**).

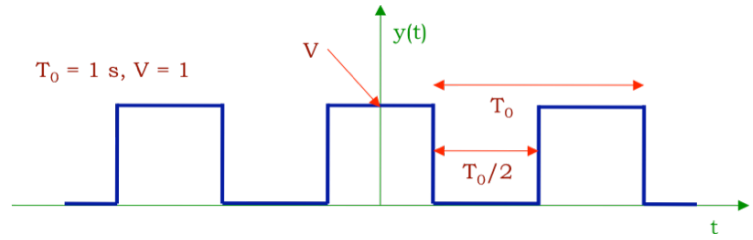
$$v_G(t) = V_G \quad \Rightarrow \quad V_G(s) = \frac{V_G}{s} = \frac{5}{s}$$

$$V_0(s) = V_G(s)H(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

Puesto que se hace referencia al régimen permanente, no se tienen en cuenta las raíces introducidas por la función de transferencia. Es decir,

$$K_0 = \left[\frac{sN(s)}{s(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = 2.5$$

$$v_0(t)_{\text{permanente}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2.5}{s}\right\} = 2.5u(t)$$

Problema 5

a Obtened la **serie de Fourier** (en forma trigonométrica) correspondiente a la función periódica mostrada en la figura (**1 punto**).

Se trata de una función de simetría par, por lo que son aplicables las siguientes expresiones:

$$a_v = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} y(t) dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/4} V dt + \frac{2}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} 0 dt = \frac{V}{2} = 0.5$$

$$a_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} y(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} V \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt + \frac{4}{T_0} \int_{T_0/4}^{T_0/2} 0 \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt = \frac{2V}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{2}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$b_k = 0$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = a_k \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0^\circ$$

$$y(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0} - \varphi_k\right) = 0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(2k\pi t)$$

b Si la función de transferencia de un circuito es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$$

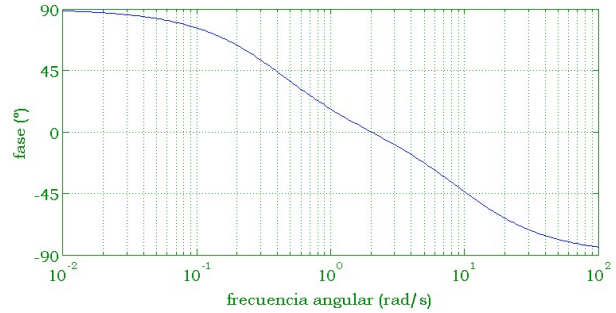
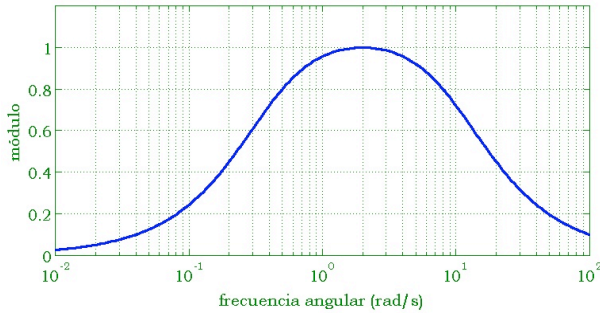
cuando el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, ¿cuánto vale el **módulo** de dicha función para $\omega=1 \text{ rad/s}$? (**0.5 puntos**).

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \Rightarrow H(j\omega) = \left\{ H(s) \right\}_{s=j\omega} = \frac{1}{4 - \omega^2 + j4\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + (4\omega)^2}} = \frac{1}{\omega^2 + 4} \Rightarrow |H(j\omega)|_{\omega=1 \text{ rad/s}} = 0.2$$

Problema 6

Las figuras representan la respuesta en frecuencia (en módulo y en fase) de un filtro.



a Obtened la **frecuencia angular de resonancia (0.5 puntos)**.

$$\text{frecuencia de resonancia} \Rightarrow \varphi = 0^\circ \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s (de la figura)}$$

b Obtened la(s) frecuencia(s) angular(es) que limitan la **banda de paso (1 punto)**.

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 \Rightarrow |H(j\omega)| = |H(j\omega)|_{\max} = 1 &\Rightarrow \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} = 0.7 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \omega_1 = 0.4 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 10 \text{ rad/s} \end{array} \right. \text{ (de la figura)} \end{aligned}$$