

UNIVERSIDAD DE VIGO

Escuela de Ingeniería de Telecomunicación

Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Primer curso

Análisis de circuitos lineales

Examen de 11 julio 2012

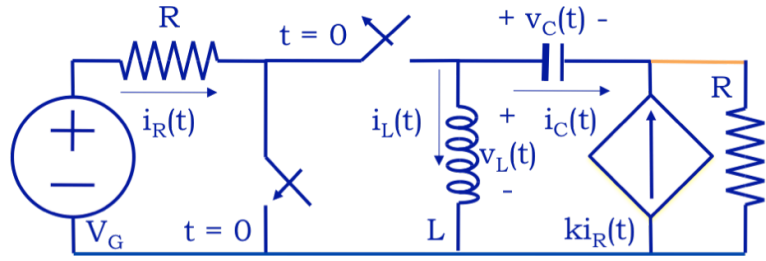
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Escuela de Ingeniería de Telecomunicación

UNIVERSIDAD DE VIGO

Problema 1

En el circuito de la figura la fuente es continua.



a Obtened los **valores** de v_C , i_C , i_L y v_L para $t = 0^-$, $t = 0^+$ y $t = \infty$ (**1.2 puntos**).

Para $t \leq 0$ s la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto. En consecuencia, $v_L(0^-) = 0$ V e $i_C(0^-) = 0$ A. Además,

$$\left. \begin{aligned} i_R(0^-) &= \frac{V_G - v_L(0^-)}{R} = \frac{V_G}{R} \\ V_G &= i_R(0^-)R + v_C(0^-) + [i_C(0^-) + ki_R(0^-)]R \\ i_L(0^-) &= i_R(0^-) - i_C(0^-) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_C(0^-) &= -kV_G \\ i_L(0^-) &= \frac{V_G}{R} \end{aligned} \right.$$

En $t = 0$ s la corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad no pueden experimentar cambios bruscos en sus valores. En consecuencia,

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{V_G}{R} \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = -kV_G$$

Además, en el circuito se verifican las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} i_R(0^+) &= \frac{V_G - 0}{R} = \frac{V_G}{R} \\ v_L(0^+) &= v_C(0^+) + [i_C(0^+) + ki_R(0^+)]R \\ i_C(0^+) &= -i_L(0^+) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_L(0^+) &= -V_G \\ i_C(0^+) &= -\frac{V_G}{R} \end{aligned} \right.$$

Para $t = \infty$ s la inductancia es un cortocircuito y la capacidad, un circuito abierto. En consecuencia, $v_L(\infty) = 0$ V e $i_C(\infty) = 0$ A. Además,

$$\left. \begin{aligned} i_R(\infty) &= \frac{V_G - 0}{R} = \frac{V_G}{R} \\ v_L(\infty) &= v_C(\infty) + [i_C(\infty) + ki_R(\infty)]R \\ i_L(\infty) &= -i_C(\infty) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_C(\infty) &= -kV_G \\ i_C(\infty) &= 0 \text{ A} \end{aligned} \right.$$

- b** Obtend las ecuaciones diferenciales de i_L y v_C para $t \geq 0$ s (**0.3 puntos**).

En el periodo considerado, en el circuito se verifican las relaciones

$$\left. \begin{aligned} i_R(t) &= \frac{V_G - 0}{R} = \frac{V_G}{R} \\ L \frac{di_L(t)}{dt} &= v_C(t) + \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} + k i_R(t) \right] R \\ C \frac{dv_C(t)}{dt} &= -i_L(0^+) \end{aligned} \right| \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) &= -k V_G \\ LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) &= 0 \end{aligned} \right.$$

- c** Si $i_L(t \geq 0) = i_L(\infty) + Ate^{-t} + Be^{-t}$ (t en s), ¿cómo es la **respuesta** de la parte del circuito que contiene los elementos reactivos? ¿Cuánto valen las **raíces de la ecuación característica**? ¿Cuánto valen el **coeficiente de amortiguamiento** y la **frecuencia angular de resonancia**? (**0.3 puntos**).

La forma de la expresión es la que corresponde a la respuesta amortiguada.

En la respuesta amortiguada las raíces de la ecuación característica son iguales y coinciden con los coeficientes de los exponentes de la expresión temporal. Luego $s_{1,2} = -1 \text{ s}^{-1}$.

Además, las raíces de la ecuación característica coinciden con el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia angular de resonancia. Es decir,

$$\alpha = \omega_0 = s_{1,2} = 1 \text{ s}^{-1}$$

- d** ¿Cuál de las curvas de la figura corresponde a $i_L(t)$? Utilizad los datos adjuntos. (**0.2 puntos**).

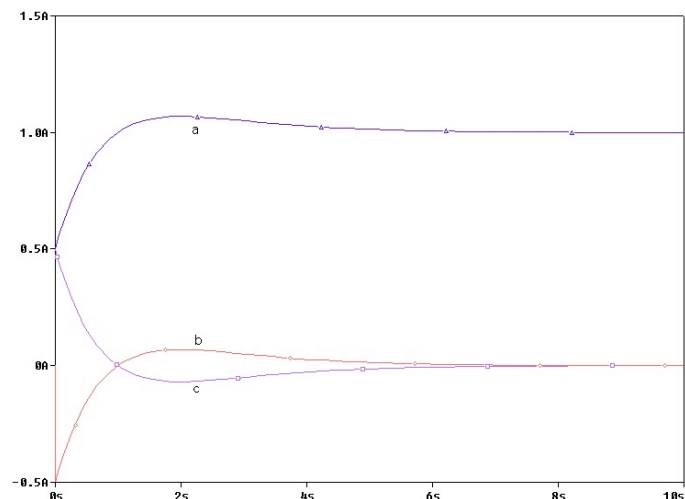
$$V_G = 1 \text{ V}$$

$$k = 2$$

$$R = 2 \Omega$$

$$L = 1 \text{ H}$$

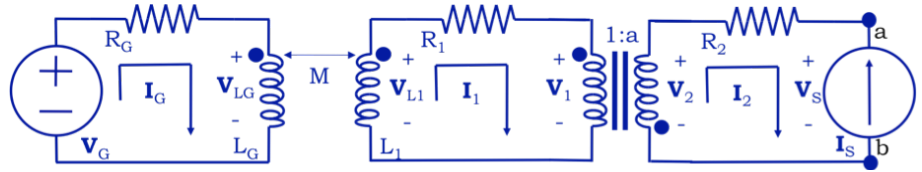
$$C = 1 \text{ F}$$



La única curva que satisface los requisitos impuestos por las condiciones iniciales y finales obtenidas en el apartado **a** es la marcada con la letra **c**.

Problema 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal a una frecuencia angular ω .



a Suponiendo conocidos los valores de V_G , I_S , I_G , I_1 e I_2 , así como los de la frecuencia angular y los elementos pasivos, **obtened** V_{LG} , V_{L1} , V_1 y V_2 (**1 punto**).

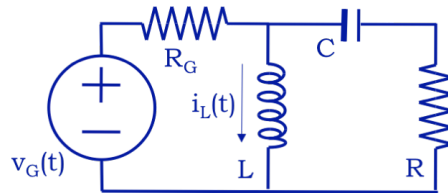
$$V_{LG} = V_G - I_G R_G \quad V_{L1} = -(-I_G j\omega M + I_1 j\omega L_1) \quad V_1 = V_{L1} - I_1 R_1 \quad V_2 = -a V_1$$

b Suponiendo conocidos todos los datos indicados en el apartado anterior, obtened la **tensión equivalente de Thévenin** entre **a** y **b** (**0.5 puntos**).

$$V_{Th} = V_S = V_2 - I_2 R_2$$

Problema 3

Obtened la **expresión temporal** de $i_L(t)$ (**1.5 puntos**).



$$v_G(t) = V_D + V_A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{array}{llll} V_D = 2 \text{ V} & V_A = 2 \text{ V} & \omega = 4 \text{ Mrad/s} & \varphi = 0^\circ \\ R_G = 1 \Omega & R = 4 \Omega & L = 0.5 \mu\text{H} & C = 0.125 \mu\text{F} \end{array}$$

El circuito soporta simultáneamente dos excitaciones, por lo que hay que aplicar el principio de superposición.

Excitación sinusoidal.

El fasor representativo de la tensión del generador es

$$V_A = V_A e^{j\varphi} = 2 \text{ V}$$

Teniendo en cuenta que, con los valores del enunciado, se tiene

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0 \Omega$$

en el circuito se verifican las ecuaciones (se utilizan parcialmente los datos del enunciado)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_A &= \mathbf{I}_L(R + j\omega L) - \mathbf{I}_C j\omega L \\ 0 &= -\mathbf{I}_L j\omega L + \mathbf{I}_C \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{I}_L &= \frac{\mathbf{V}_A}{R_G + j\omega L + \frac{(\omega L)^2}{R}} \\ \mathbf{I}_C &= \frac{\mathbf{I}_G j\omega L}{R} \end{aligned} \right.$$

con lo que, utilizando los datos del enunciado,

$$\mathbf{I}_L = 0.5 - j0.5 \text{ A} \quad \mathbf{I}_C = 0.25 + j0.25 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_{LA} = \mathbf{I}_L - \mathbf{I}_C = 0.25 - j0.75 \text{ A} = 0.79 \angle -79.5^\circ \text{ A}$$

Excitación continua.

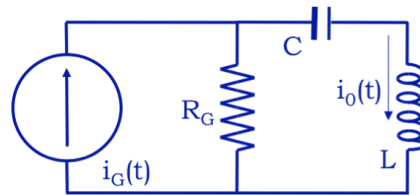
La capacidad es un circuito abierto, con lo que toda la corriente proveniente del generador circula por la inductancia. Dado que ésta es un cortocircuito, dicha corriente es

$$I_{LD} = \frac{V_D}{R_G} = 2 \text{ A}$$

Corriente total.

$$i_L(t) = I_{LD} + \operatorname{Re}\left\{ \mathbf{I}_{LA} e^{j\omega t} \right\} = 2 + 0.79 \cos\left[(4 \times 10^6 t - 1.25) \text{ rad} \right] \text{ A} \quad (t \text{ en s})$$

Problema 4



$$R_G = 1 \, \Omega \quad L = 0.1 \, \text{H} \quad C = 10 \, \text{F}$$

a Siendo $I_G(s)$ e $I_0(s)$ las transformadas de Laplace, respectivamente, de $i_G(t)$ e $i_0(t)$, obtened la **función de transferencia**, $H(s) = I_0(s)/I_G(s)$, del circuito de la figura **(0.6 puntos)**.

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{R_G}{R_G + \frac{1}{sC} + sL} = \frac{sR_G C}{s^2 LC + sR_G C + 1} = \frac{10s}{s^2 + 10s + 1}$$

b Suponiendo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_G(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

obtened la **respuesta al impulso** o **función de ponderación** ($h(t)$) **(0.6 puntos)**.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+4}$$

$$K_1 = \left[\frac{(s+1)N(s)}{D(s)} \right]_{s=-1} = \frac{1}{3} \quad K_2 = \left[\frac{(s+4)N(s)}{D(s)} \right]_{s=-4} = -\frac{1}{3}$$

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1/3}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1/3}{s+4}\right\} = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$$

c Suponiendo que la función de transferencia es la indicada en el apartado anterior y que $v_G(t) = V_G = 4 \text{ V}$, obtened la expresión temporal de $v_O(t)$ en régimen permanente (**0.8 puntos**).

$$v_G(t) = V_G \quad \Rightarrow \quad V_G(s) = \frac{V_G}{s} = \frac{4}{s}$$

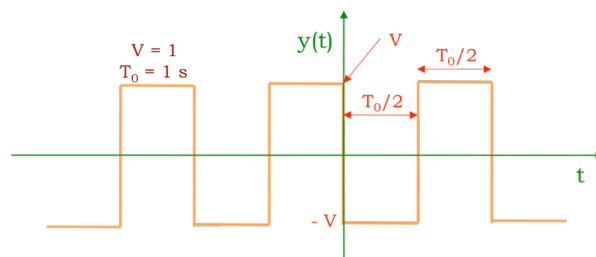
$$V_O(s) = V_G(s)H(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+4)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+4}$$

Puesto que se hace referencia al régimen permanente, no se tienen en cuenta las raíces introducidas por la función de transferencia. Es decir,

$$K_0 = \left[\frac{sN(s)}{s(s+1)(s+4)} \right]_{s=0} = 1$$

$$v_O(t)_{\text{permanente}} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$$

Problema 5



a Obtened la **serie de Fourier** (en forma trigonométrica) correspondiente a la función periódica mostrada en la figura (**1 punto**).

Se trata de una función de simetría impar, por lo que son aplicables las siguientes expresiones:

$$a_v = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} y(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = -\frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} V \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt = \frac{2V[\cos(k\pi) - 1]}{k\pi} = \frac{2[\cos(k\pi) - 1]}{k\pi}$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |b_k| \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$y(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0} - \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2[\cos(k\pi) - 1]}{k\pi} \right| \cos(2k\pi t - \varphi_k)$$

b Si la función de transferencia de un circuito es

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+4}$$

cuando el circuito funciona en régimen sinusoidal permanente, ¿cuánto vale el **módulo** de la transformada de Fourier para $\omega = 1 \text{ rad/s}$? (**0.5 puntos**).

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1+j\omega}{(4-\omega^2)+j4\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + (4\omega)^2}} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^2+4} \Rightarrow |H(j\omega)|_{\omega=1 \text{ rad/s}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Problema 6

La función de transferencia de un filtro es

$$H(s) = \frac{10s}{s^2+10s+4}$$

a Obtened la **frecuencia angular de resonancia** del filtro (**1 punto**).

En régimen sinusoidal permanente se tiene

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{j10\omega}{4-\omega^2+j10\omega} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

La frecuencia de resonancia es aquella para la que la fase de la función de transferencia es nula. Es decir,

$$\begin{aligned}\omega = \omega_0 &\Rightarrow \angle H(j\omega_0) = 0^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \angle N(j\omega_0) = \angle D(j\omega_0) \Rightarrow \operatorname{Re}\{D(j\omega_0)\} = 0^\circ \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

b Obtened el máximo del módulo de la respuesta en frecuencia del filtro **(0.5 puntos)**.

$$\begin{aligned}|H(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|} &\Rightarrow \max |H(j\omega)| \Rightarrow |D(j\omega)|_{\min} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}\{D(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s} \Rightarrow \max |H(j\omega)| = 1\end{aligned}$$

Obsérvese que en este caso particular la frecuencia angular de resonancia coincide con aquella a la que se obtiene el máximo del módulo de la respuesta en frecuencia.