

Análisis de circuitos lineales

Examen de 12 de mayo de 2014

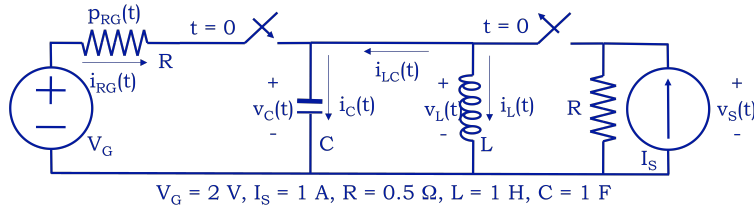
Preparado por:

Enrique Sánchez

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones

Escuela de Ingeniería de Telecomunicación

UNIVERSIDAD DE VIGO

PROBLEMA 1

En el circuito de la figura las fuentes son continuas. Después del cambio de posición de los interruptores que tiene lugar en $t=0$ s ya no se producen más cambios.

Apartado 1 (1.2 puntos). Obtened los valores de v_C , i_C , i_L y v_L en $t=0^-$ s, $t=0^+$ s y $t=\infty$ s.

$$\text{continua} \Rightarrow \begin{cases} i_C(0^-) = 0 \text{ A} \\ v_L(0^-) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{paralelo} \Rightarrow v_C(0^-) = v_S(0^-) = v_L(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$\text{nudo} \Rightarrow i_L(0^-) = I_S - \frac{v_S(0^-)}{R} - i_{LC}(0^-) = I_S = 1 \text{ A}$$

$$\text{continuidad} \Rightarrow \begin{cases} i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1 \text{ A} \\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{paralelo} \Rightarrow v_L(0^+) = v_C(0^+) = 0 \text{ V}$$

$$\text{nudo} \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{V_G - v_C(0^+)}{R} - i_L(0^+) = 3 \text{ A}$$

$$\text{continua} \Rightarrow \begin{cases} i_C(\infty) = 0 \text{ A} \\ v_L(\infty) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{paralelo} \Rightarrow v_C(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V}$$

$$\text{nudo} \Rightarrow i_L(\infty) = \frac{V_G - v_C(\infty)}{R} - i_C(\infty) = 4 \text{ A}$$

Apartado 2 (0.8 puntos). Obtened las ecuaciones diferenciales que rigen los comportamientos de $v_C(t)$ e $i_L(t)$ para $t \geq 0$ s.

En el circuito se verifican las ecuaciones

$$\frac{V_G - v_C(t)}{R} = i_C(t) + i_L(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L(t) \quad (1a)$$

$$v_C(t) = v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1b)$$

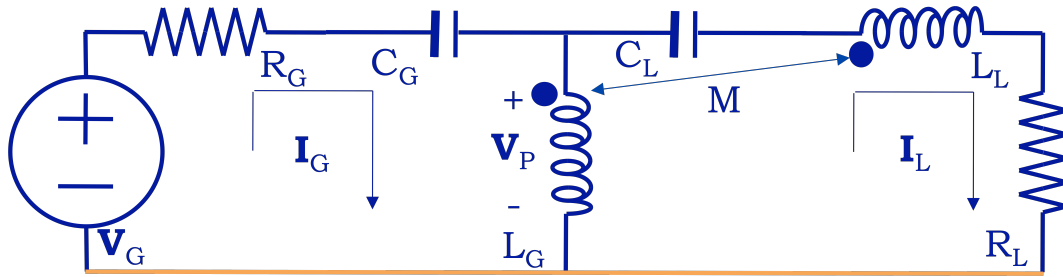
Despejando $i_L(t)$ de (1a) y sustituyendo en (1b) $\Rightarrow LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$ (2a)

Sustituyendo (1b) en (1a) $\Rightarrow LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = \frac{V_G}{R}$ (2b)

Sustituyendo los datos del enunciado en (2)

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2 \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 4 \quad (3b)$$

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .

Apartado 1 (1 punto). Escribid un sistema de dos ecuaciones que permita obtener los valores de $\mathbf{I}_G$ e $\mathbf{I}_L$ a partir de las características de los elementos del circuito (no resolváis el sistema).

En el circuito se verifican las ecuaciones

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G \right) - \mathbf{I}_L j\omega L_G + \mathbf{I}_L j\omega M \quad (1a)$$

$$0 = (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_L) j\omega M - \mathbf{I}_G j\omega L_G + \mathbf{I}_L \left(j\omega L_G + \frac{1}{j\omega C_L} + j\omega L_L + R_L \right) - \mathbf{I}_L j\omega M \quad (1b)$$

Reordenándolas se tiene

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} + j\omega L_G \right) - \mathbf{I}_L (j\omega L_G - j\omega M) \quad (2a)$$

$$0 = -\mathbf{I}_G (j\omega L_G - j\omega M) + \mathbf{I}_L \left(j\omega L_G + \frac{1}{j\omega C_L} + j\omega L_L + R_L - j2\omega M \right) \quad (2b)$$

Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo conocidos los valores de $\mathbf{I}_G$ e $\mathbf{I}_L$, obtened el valor de $\mathbf{V}_P$.

La tensión pedida puede ser calculada utilizando cualquiera de las dos expresiones que se indican a continuación.

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} \right) = (\mathbf{I}_G - \mathbf{I}_L) j\omega L_G + \mathbf{I}_L j\omega M$$

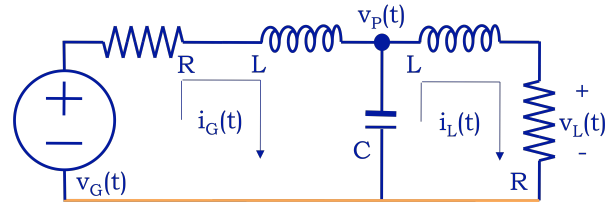
PROBLEMA 3 (1.5 puntos)

Obtened la expresión temporal de $v_L(t)$ utilizando los siguientes datos:

$$v_G(t) = V_D + V_A \cos(\omega t + \varphi), \omega = 1 \text{ rad/s}, \varphi = 0^\circ$$

$$V_D = 2 \text{ V}, V_A = 2 \text{ V}$$

$$R = 1 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 2 \text{ F}$$



Como indica la expresión de $v_G(t)$, el circuito está sometido a una excitación continua y a otra sinusoidal.

Para la excitación continua las inductancias son cortocircuitos y la capacidad, un circuito abierto, con lo que el circuito queda reducido a la fuente en serie con las dos resistencias, constituyendo un divisor de tensión. En consecuencia

$$V_{LD} = \frac{RV_D}{R + R} = 1 \text{ V}$$

Para la excitación sinusoidal se tiene

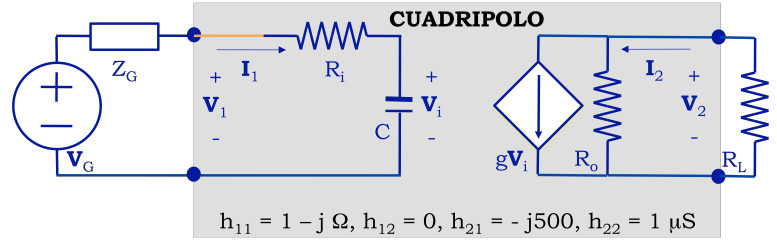
$$\mathbf{V}_A = V_A \angle \varphi = 2 \text{ V} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y_P = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = 0.5 + j1.5 \text{ S} \\ \mathbf{I}_G = \frac{\mathbf{V}_A}{R + j\omega L + \frac{1}{Y_P}} = 1.5 - j0.5 \text{ A} \\ \mathbf{V}_P = \frac{\mathbf{I}_G}{Y_P} = -j \text{ V} \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{V}_{LA} = \frac{\mathbf{V}_P R}{R + j\omega L} = -0.5 - j0.5 \text{ V} = 0.5\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$$

con lo que la combinación de ambas excitaciones produce una salida dada por

$$v_L(t) = V_{LD} + \text{Re}\{\mathbf{V}_{LA} e^{j\omega t}\} = 1 + 0.5\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ V}, t \text{ en s}$$

PROBLEMA 4

El cuadripolo de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Cuando ésta vale 1 Grad/s, los parámetros híbridos (h) del cuadripolo tienen los valores indicados en la figura ($C=1$ nF).



Apartado 1 (1 punto). Obtened los valores de R_i , R_o y g .

En el circuito se verifican las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 \left(R_i + \frac{1}{j\omega C} \right) \quad (1a)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{R_o} + g\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{R_o} + \frac{g}{j\omega C} \mathbf{I}_1 \quad (1b)$$

Por otra parte, los parámetros híbridos (h) están definidos por las relaciones

$$\mathbf{V}_1 = h_{11}\mathbf{I}_1 + h_{12}\mathbf{V}_2 \quad (2a)$$

$$\mathbf{I}_2 = h_{21}\mathbf{I}_1 + h_{22}\mathbf{V}_2 \quad (2b)$$

Comparando término a término (1) y (2) se llega a

$$\left. \begin{aligned} 1 - j \Omega &= h_{11} = R_i + \frac{1}{j\omega C} \\ 0 &= h_{12} \\ -j500 &= h_{21} = \frac{g}{j\omega C} \\ 1 \mu S &= h_{22} = \frac{1}{R_o} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R_i &= h_{11} - \frac{1}{j\omega C} = 1 \Omega \\ g &= j\omega C h_{21} = 500 S \\ R_o &= \frac{1}{h_{22}} = 1 M\Omega \end{aligned} \right.$$

Apartado 2 (0.5 puntos). Obtened la ganancia de corriente ($\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$) cuando el cuadripolo se inserta en un circuito en la forma indicada en la figura ($R_L=50 \Omega$).

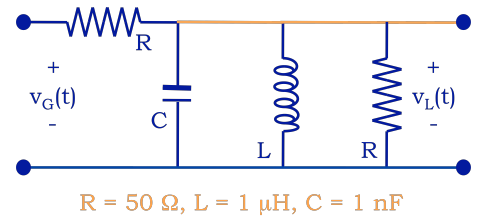
Teniendo en cuenta que $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I}_2 R_L$, puede obtenerse

$$\mathbf{I}_2 = h_{21}\mathbf{I}_1 + h_{22}\mathbf{V}_2 = h_{21}\mathbf{I}_1 - h_{22}\mathbf{I}_2 R_L \Rightarrow \mathbf{I}_2(1 + h_{22}R_L) = h_{21}\mathbf{I}_1 \Rightarrow \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}R_L} \approx h_{21} = -j500$$

PROBLEMA 5

Para los apartados 2, 4 y 5

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$



Apartado 1 (0.5 puntos). Obtened la función de transferencia del filtro de la figura en el dominio s ($H(s)=V_L(s)/V_G(s)$).

Las impedancias generalizadas correspondientes a la resistencia, la capacidad y la inductancia son, respectivamente, R , $1/(sC)$ y sL . Expresando el circuito en función de tales impedancias, agrupando las impedancias en paralelo y observando que el circuito se comporta como un divisor de tensión, se tiene

$$Y = sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} \Rightarrow Z = \frac{1}{Y} = \frac{sRL}{s^2RLC + sL + R}$$

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{Z}{R + Z} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{2s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{2 \times 10^7 s}{s^2 + 4 \times 10^7 s + 10^{15}}$$

Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo que la función de transferencia del filtro es la indicada a la izquierda de la figura, obtened la respuesta al impulso del circuito.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{(s + 1)^2}$$

$$D(s) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \text{ (raíz doble)} \quad \left| \begin{array}{l} K_1 = \left\{ \frac{d[(s - s_1)^2 H(s)]}{ds} \right\}_{s=s_1} = 1 \\ K_2 = \left\{ (s - s_1)^2 H(s) \right\}_{s=s_1} = -1 \end{array} \right| \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-t}(1 - t)$$

Apartado 3 (0.5 puntos). Justificad el tipo de respuesta que presenta el filtro de la figura.

Para frecuencias muy bajas (muy altas) la inductancia (la capacidad) es un cortocircuito con lo que la tensión en la salida es nula. Para una frecuencia intermedia, la inductancia y la capacidad están en resonancia, constituyendo un circuito abierto, con lo que toda la corriente circula por las resistencias produciendo una tensión no nula en la salida. Luego se trata de un filtro paso banda.

Apartado 4 (0.5 puntos). Calculad los valores máximo y mínimo de la respuesta en frecuencia del módulo de la función de transferencia del filtro considerado en el apartado 2.

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{1 - \omega^2 + j2\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \frac{\omega}{1 + \omega^2} \Rightarrow \text{mínimo para } \omega = 0 \text{ rad/s}$$

El módulo no puede tomar valores negativos, con lo que su valor mínimo será 0.

El máximo se obtiene para la frecuencia que anula la primera derivada. Es decir,

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = \frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2}$$

$$\left\{ \frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} \right\}_{\omega=\omega_{\max}} = 0 \Rightarrow \omega_{\max} = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)|_{\omega=\omega_{\max}} = \frac{\omega_{\max}}{1 + \omega_{\max}^2} = 0.5$$

Al hacer el cálculo anterior téngase presente que la frecuencia angular no puede tomar valores negativos.

Apartado 5 (0.5 puntos). Según corresponda, obtened la frecuencia angular de corte del filtro o, alternativamente, la frecuencia angular de resonancia y las frecuencias angulares que limitan la banda de paso del circuito considerado en el apartado 2.

A partir de la expresión incluida en el apartado 4, y teniendo en cuenta que, por tratarse de un resonador ideal las frecuencias central y de resonancia coinciden y que la segunda es aquélla para la que se anula la fase de la función de transferencia, se tiene

$$\angle H(j\omega) = 90^\circ - \arctg \frac{2\omega}{1 - \omega^2}$$

$$\angle H(j\omega) = 0^\circ \Rightarrow \omega_0 = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow |H(j\omega)|_{\omega=\omega_0} = 0.5 = |H(j\omega)|_{\max}$$

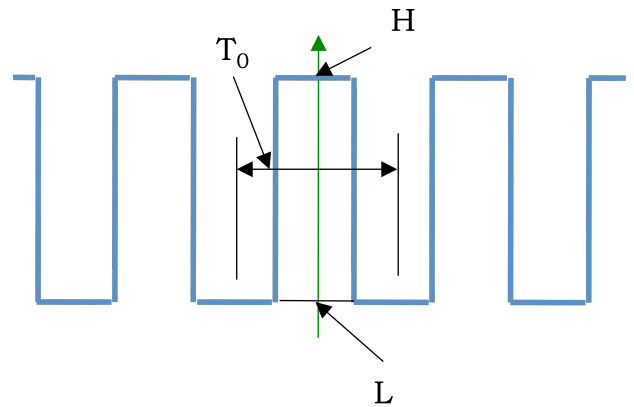
$$\omega = \omega_{1,2} \Rightarrow |H(j\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_{1,2}}{1 + \omega_{1,2}^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.4 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 2.5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

PROBLEMA 6 (1 punto)

La función periódica del tiempo representada en la figura puede ser desarrollada en serie de Fourier, resultando la expresión

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Obtened, en función de H , L y T_0 , las expresiones que permiten determinar, para cada valor de k , los valores de a_v , a_k y b_k .



Ya que se trata de una función con simetría par, b_k es nulo para cualquier valor de k . En las funciones de simetría par son de aplicación las siguientes expresiones:

$$a_v = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt = \frac{2}{T_0} \left(\int_0^{T_0/4} H dt + \int_{T_0/4}^{T_0/2} L dt \right) = \frac{2}{T_0} \left\{ [Ht]_0^{T_0/4} + [Lt]_{T_0/4}^{T_0/2} \right\} = \frac{H + L}{2}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt = \frac{4}{T_0} \left(\int_0^{T_0/4} H \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt + \int_{T_0/4}^{T_0/2} L \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt \right) = \\ &= \frac{4}{T_0} \frac{T_0}{2k\pi} \left\{ \left[H \sin\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) \right]_0^{T_0/4} + \left[L \sin\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) \right]_{T_0/4}^{T_0/2} \right\} = \frac{2(H - L)}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

En estas expresiones se ha utilizado la igualdad $\omega_0 = 2\pi/T_0$.