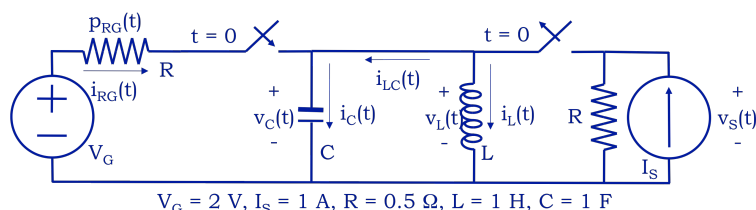


Alumno/a						DNI	
Grupo						Fecha	
1	2	3	4	5	6	Total	

PROBLEMA 1

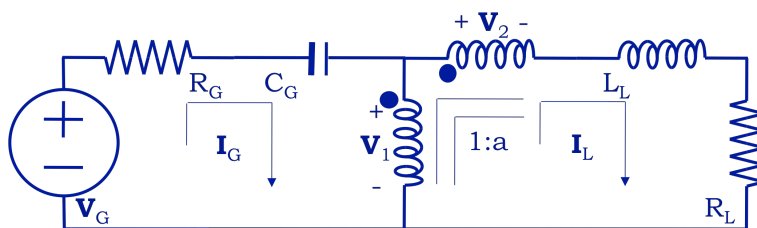
En el circuito de la figura las fuentes son continuas. Después del cambio de posición de los interruptores que tiene lugar en $t=0 \text{ s}$ ya no se producen más cambios.

Apartado 1 (1.2 puntos). Obtened los valores de v_C , i_{RG} , i_{LC} y v_S en $t=0^- \text{ s}$, $t=0^+ \text{ s}$ y $t=\infty \text{ s}$.

Apartado 2 (0.8 puntos). Si, para $t \geq 0 \text{ s}$, $i_L(t) = 4 - 3(1+t)e^{-t} \text{ A}$ ($[t]=\text{s}$), obtened la expresión temporal de $v_C(t)$ para el mismo intervalo de tiempo.

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



Apartado 1 (1 punto). Escribid un sistema de ecuaciones que permita obtener los valores de I_G e I_L a partir de las características de los elementos del circuito (no resolváis el sistema).

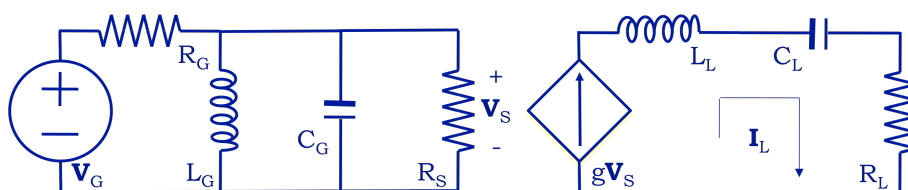
Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo conocidos los valores de I_G e I_L , obtened el valor de V_1 .

PROBLEMA 3 (1.5 puntos)

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Obtened los valores de L_G y C_L para que la potencia media en R_L sea máxima.

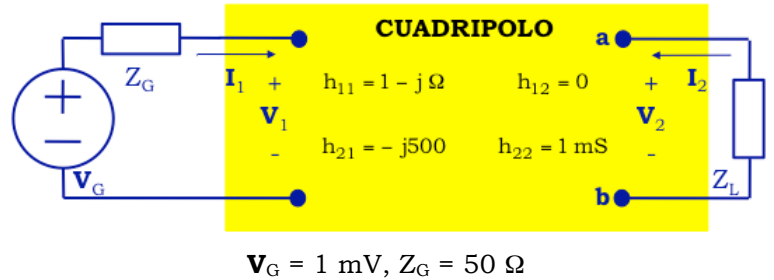
$$V_G = 2 \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$R_G = 1 \text{ K}\Omega, R_S = 1 \text{ K}\Omega, R_L = 1 \text{ K}\Omega, g = 250 \text{ S}, C_G = 2 \text{ nF}, L_L = 2 \text{ }\mu\text{H}$$



PROBLEMA 4 (1.5 puntos)

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Cuando ésta vale 1 Grad/s, los parámetros híbridos (h) del cuadripolo tienen los valores indicados en la figura.

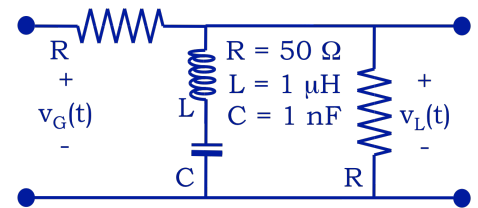


Obtened el valor de Z_L necesario para que en ella se disipe la máxima potencia media. Utilizad aproximaciones razonables para efectuar los cálculos.

PROBLEMA 5

Para los apartados 2, 4 y 5

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{0.5(s^2 + 1)}{s^2 + 2s + 1}$$



Apartado 1 (0.5 puntos). Obened la función de transferencia del filtro de la figura en el dominio s ($H(s)=V_L(s)/V_G(s)$).

Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo que la función de transferencia del filtro es la indicada a la izquierda de la figura, obtened la respuesta al impulso del circuito.

Apartado 3 (0.5 puntos). Justificad el tipo de respuesta que presenta el filtro de la figura.

Apartado 4 (0.5 puntos). Calculad los valores máximo y mínimo de la respuesta en frecuencia del módulo de la función de transferencia del filtro considerado en el apartado 2.

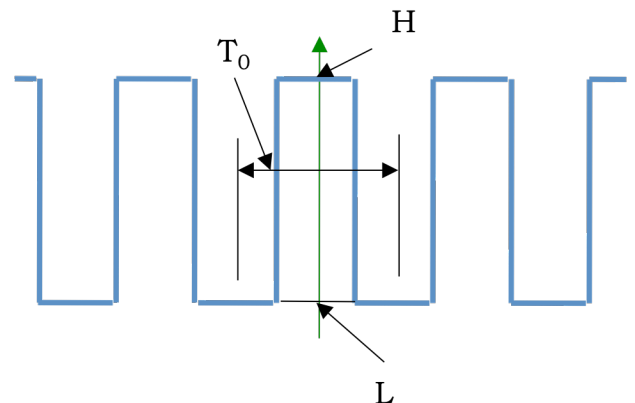
Apartado 5 (0.5 puntos). Dado el filtro constituido por el circuito considerado en el apartado 2, obtened la fase de la función de transferencia para $\omega=1 \text{ rad/s}$.

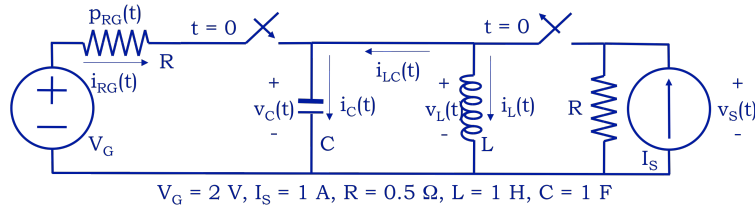
PROBLEMA 6 (1 punto)

La función periódica del tiempo representada en la figura puede ser desarrollada en serie de Fourier, resultando la expresión

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[(k\omega_0 t) - \varphi_k]$$

Obtened, en función de H , L y T_0 , las expresiones que permiten determinar φ_k .



PROBLEMA 1

En el circuito de la figura las fuentes son continuas. Después del cambio de posición de los interruptores que tiene lugar en $t=0$ s ya no se producen más cambios.

Apartado 1 (1.2 puntos). Obtened los valores de v_C , i_{RG} , i_{LC} y v_S en $t=0^-$ s, $t=0^+$ s y $t=\infty$ s.

$$\begin{aligned}
 \text{continua} &\Rightarrow \begin{cases} i_C(0^-) = 0 \text{ A} \\ v_L(0^-) = 0 \text{ V} \end{cases} \\
 \text{malla} &\Rightarrow i_{LC}(0^-) = i_C(0^-) = 0 \text{ A} \\
 \text{paralelo} &\Rightarrow v_C(0^-) = v_L(0^-) = v_S(0^-) = 0 \text{ V} \\
 \text{desconexión} &\Rightarrow i_{RG}(0^-) = 0 \text{ A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{continuidad} &\Rightarrow \begin{cases} i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_S - \frac{v_C(0^-)}{R} - i_C(0^-) = I_S = 1 \text{ A} \\ v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \text{ V} \end{cases} \\
 \text{malla} &\Rightarrow i_{LC}(0^+) = -i_L(0^+) = -1 \text{ A} \\
 \text{malla} &\Rightarrow i_{RG}(0^+) = \frac{V_G - v_C(0^+)}{R} = 4 \text{ A} \\
 \text{desconexión} &\Rightarrow v_S(0^+) = I_S R = 0.5 \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{continua} &\Rightarrow \begin{cases} i_C(\infty) = 0 \text{ A} \\ v_L(\infty) = 0 \text{ V} \end{cases} \\
 \text{paralelo} &\Rightarrow v_C(\infty) = v_L(\infty) = 0 \text{ V} \\
 \text{nudo} &\Rightarrow i_{LC}(\infty) = -\frac{V_G - v_C(\infty)}{R} + i_C(\infty) = -4 \text{ A} \\
 \text{malla} &\Rightarrow i_{RG}(\infty) = \frac{V_G - v_C(\infty)}{R} = 4 \text{ A} \\
 \text{desconexión} &\Rightarrow v_S(\infty) = I_S R = 0.5 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Apartado 2 (0.8 puntos). Si, para $t \geq 0$ s, $i_L(t) = 4 - 3(1+t)e^{-t}$ A ($[t]=s$), obtened la expresión temporal de $v_C(t)$ para el mismo intervalo de tiempo.

En el circuito se verifica

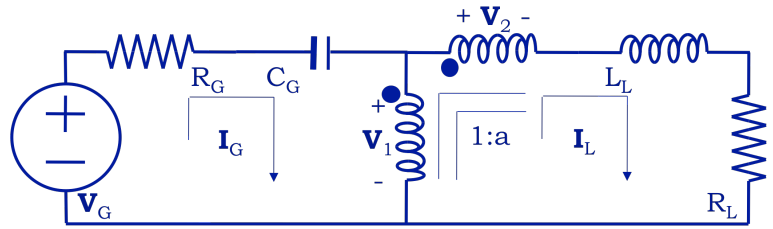
$$v_C(t) = v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Sustituyendo el dato del enunciado en esta expresión se obtiene

$$v_C(t) = 3te^{-t} \text{ V (t en s)}$$

PROBLEMA 2

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω .



Apartado 1 (1 punto). Escribid un sistema de ecuaciones que permita obtener los valores de $\mathbf{I}_G$ e $\mathbf{I}_L$ a partir de las características de los elementos del circuito (no resolváis el sistema).

En el circuito se verifican las relaciones

$$\text{Ecuaciones de malla} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{V}_G = \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} \right) + \mathbf{V}_1 & (1a) \\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{I}_L (j\omega L_L + R_L) & (1b) \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones del transformador} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1 & (2a) \\ \mathbf{I}_G - \mathbf{I}_L = -a\mathbf{I}_L & (2b) \end{cases}$$

Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo conocidos los valores de $\mathbf{I}_G$ e $\mathbf{I}_L$, obtened el valor de $\mathbf{V}_1$.

La tensión pedida puede ser calculada utilizando cualquiera de las dos expresiones que se indican a continuación.

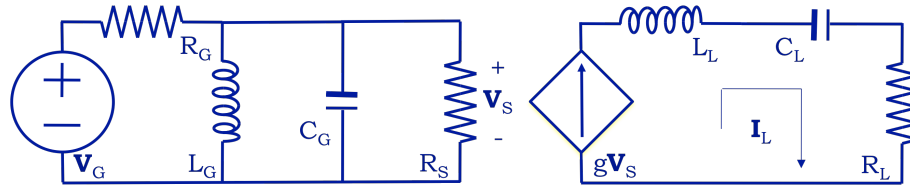
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_G - \mathbf{I}_G \left(R_G + \frac{1}{j\omega C_G} \right) = a\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_L (j\omega L_L + R_L)$$

PROBLEMA 3 (1.5 puntos)

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Obtend los valores de L_G y C_L para que la potencia media en R_L sea máxima.

$$V_G = 2 \text{ V}, \omega = 1 \text{ Mrad/s}$$

$$R_G = 1 \text{ K}\Omega, R_S = 1 \text{ K}\Omega, R_L = 1 \text{ K}\Omega, g = 250 \text{ S}, C_G = 2 \text{ nF}, L_L = 2 \text{ }\mu\text{H}$$



La potencia media en R_L es

$$P_L = \frac{|\mathbf{I}_L|^2 R_L}{2}$$

Luego la potencia media será máxima cuando lo sea el módulo de la corriente que circula por la resistencia.

Hay dos aspectos que maximizan la corriente:

- Que la corriente entregada por la fuente dependiente produzca una sola caída de tensión (en R_L). Esto impone la condición de que el conjunto serie L_L - C_L sea un cortocircuito a la frecuencia ω (con lo que no hay una caída de tensión global en dicho conjunto).
- Que la caída de tensión en R_S sea lo más elevada posible, a fin de que también lo sea la corriente entregada por la fuente dependiente. Esto exige que sea máxima la corriente que circula por tal resistencia, lo cual, a su vez, impone la condición de que no se desvíe corriente por el conjunto paralelo L_G - C_G ; es decir, tal conjunto ha de encontrarse en circuito abierto a la frecuencia ω .

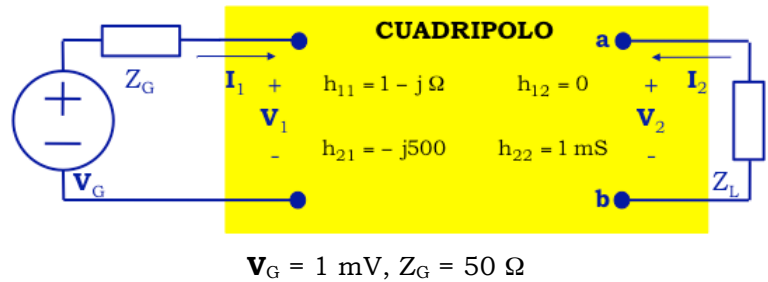
Teniendo en cuenta estas dos condiciones se llega a

$$L_G - C_G \text{ circuito abierto} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L_G C_G}} \Rightarrow L_G = \frac{1}{\omega^2 C_G} = 0.5 \text{ mH}$$

$$L_L - C_L \text{ cortocircuito} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L_L C_L}} \Rightarrow C_L = \frac{1}{\omega^2 L_L} = 0.5 \text{ }\mu\text{F}$$

PROBLEMA 4 (1.5 puntos)

El circuito de la figura, en cuya representación se ha utilizado notación fasorial, funciona en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia angular ω . Cuando ésta vale 1 Grad/s, los parámetros híbridos (h) del cuadripolo tienen los valores indicados en la figura.



Obtened el valor de Z_L necesario para que en ella se disipe la máxima potencia media. Utilizad aproximaciones razonables para efectuar los cálculos.

Para obtener la máxima potencia media en Z_L ha de verificarse

$$Z_L = Z_{Th}^*$$

siendo Z_{Th} la impedancia equivalente de Thévenin entre **a** y **b**.

Para calcular esta impedancia no puede recurrirse al procedimiento basado en la desactivación de fuentes independientes y agrupación de impedancias, ya que se desconoce la configuración interna del cuadripolo. En consecuencia, la impedancia aludida ha de ser obtenida aplicando el procedimiento general para determinar el circuito equivalente de Thévenin entre **a** y **b**.

Cuando tales puntos se encuentran en circuito abierto se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12} = \mathbf{I}_1 h_{11} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22} \\ \mathbf{I}_2 &= 0 \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= -\frac{\mathbf{V}_2 h_{22}}{h_{21}} \\ \mathbf{V}_1 &= -\frac{\mathbf{V}_2 h_{11} h_{22}}{h_{21}} \\ \mathbf{V}_G &= -\frac{\mathbf{V}_2 h_{22} (Z_G + h_{11})}{h_{21}} \Rightarrow \mathbf{V}_2 \approx -\frac{\mathbf{V}_G h_{21}}{Z_G h_{22}} = j10 \text{ V} = \mathbf{V}_{Th} \end{aligned} \right.$$

Cuando **a** y **b** están en cortocircuito hay una corriente, $\mathbf{I}_N$, que circula desde el primero hacia el segundo. En el circuito se verifica

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{I}_1 Z_G + \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{I}_1 h_{11} + \mathbf{V}_2 h_{12} = \mathbf{I}_1 h_{11} \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}_1 h_{21} + \mathbf{V}_2 h_{22} \\ \mathbf{V}_2 &= 0 \text{ V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{I}_2}{h_{21}} \\ \mathbf{V}_1 &= \frac{\mathbf{I}_2 h_{11}}{h_{21}} \\ \mathbf{V}_G &= \frac{\mathbf{I}_2 (Z_G + h_{11})}{h_{21}} \Rightarrow \mathbf{I}_2 \approx \frac{\mathbf{V}_G h_{21}}{Z_G} = -j10 \text{ mA} = -\mathbf{I}_N \end{aligned} \right.$$

En consecuencia,

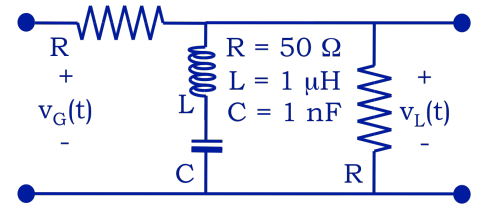
$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{I}_N} = 1 \text{ K}\Omega \Rightarrow Z_L = Z_{Th}^* = 1 \text{ K}\Omega$$

En los cálculos precedentes se ha despreciado h_{11} frente a Z_G ya que la primera impedancia es mucho menor (en módulo) que la segunda.

PROBLEMA 5

Para los apartados 2, 4 y 5

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{0.5(s^2 + 1)}{s^2 + 2s + 1}$$



Apartado 1 (0.5 puntos). Obtened la función de transferencia del filtro de la figura en el dominio s ($H(s)=V_L(s)/V_G(s)$).

Las impedancias generalizadas correspondientes a la resistencia, la capacidad y la inductancia son, respectivamente, R , $1/(sC)$ y sL . Expresando el circuito en función de tales impedancias, agrupando impedancias y observando que el circuito se comporta como un divisor de tensión, se tiene

$$Y = \frac{1}{sL + \frac{1}{sC}} + \frac{1}{R} \Rightarrow Z = \frac{1}{Y} = \frac{R(s^2LC + 1)}{s^2LC + sRC + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_G(s)} = \frac{Z}{R + Z} = \frac{0.5\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \frac{Rs}{2L} + \frac{1}{LC}} = \frac{0.5(s^2 + 10^{15})}{s^2 + 2.5 \times 10^7 s + 10^{15}}$$

Apartado 2 (0.5 puntos). Suponiendo que la función de transferencia del filtro es la indicada a la izquierda de la figura, obtened la respuesta al impulso del circuito.

$$H(s) = \frac{0.5(s^2 + 1)}{s^2 + 2s + 1} \quad \Rightarrow \quad H(s) = 0.5 - \frac{s}{s^2 + 2s + 1} = 0.5 - \frac{N(s)}{D(s)} = 0.5 - \frac{K_1}{s + 1} - \frac{K_2}{(s + 1)^2}$$

$$D(s) = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \text{ (raíz doble)}$$

$$K_1 = \left\{ \frac{d[(s - s_1)^2 H(s)]}{ds} \right\}_{s=s_1} = 1$$

$$K_2 = \left\{ (s - s_1)^2 H(s) \right\}_{s=s_1} = -1$$

$$\Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 0.5\delta(t) + e^{-t}(t - 1)$$

Apartado 3 (0.5 puntos). Justificad el tipo de respuesta que presenta el filtro de la figura.

Para frecuencias muy bajas (muy altas) la capacidad (la inductancia) es un circuito abierto con lo que llega corriente a la resistencia de salida. Para una frecuencia intermedia, la inductancia y la capacidad están en resonancia, constituyendo un cortocircuito, con lo que toda la corriente circula por éste produciendo una tensión nula en la salida. Luego se trata de un filtro de banda rechazada.

Apartado 4 (0.5 puntos). Calculad los valores máximo y mínimo de la respuesta en frecuencia del módulo de la función de transferencia del filtro considerado en el apartado 2.

$$H(j\omega) = \{H(s)\}_{s=j\omega} = \frac{0.5(1 - \omega^2)}{1 - \omega^2 + j2\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|0.5(1 - \omega^2)|}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \frac{|0.5(1 - \omega^2)|}{1 + \omega^2} \Rightarrow \text{mínimo para } \omega = 1 \text{ rad/s}$$

El módulo no puede tomar valores negativos, con lo que su valor mínimo será 0.

Dado que se trata de un filtro de banda rechazada, el valor máximo se obtiene para frecuencias muy bajas y muy altas. Calculando el límite de la expresión anterior en cualquiera de ambos casos, se obtiene que el máximo del módulo de la función de transferencia es 0.5.

Apartado 5 (0.5 puntos). Dado el filtro constituido por el circuito considerado en el apartado 2, obtened la fase de la función de transferencia para $\omega=1$ rad/s.

Como se desprende de apartados anteriores, la fase de la función de transferencia es

$$\angle H(j\omega) = 0^\circ - \arctg \frac{2\omega}{1 - \omega^2}$$

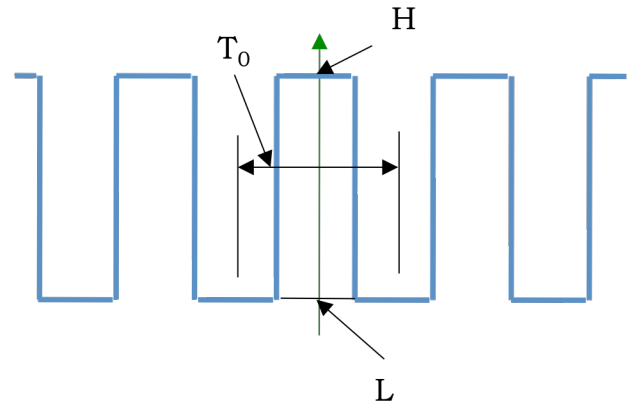
Para $\omega=1$ rad/s la expresión anterior proporciona un valor de $\pm 90^\circ$. El signo a elegir es el mismo de los valores de las fases correspondientes a frecuencias próximas a la considerada (de hecho, hay un salto entre ambos valores).

PROBLEMA 6 (1 punto)

La función periódica del tiempo representada en la figura puede ser desarrollada en serie de Fourier, resultando la expresión

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[(k\omega_0 t) - \varphi_k]$$

Obtened, en función de H , L y T_0 , las expresiones que permiten determinar φ_k .



La expresión general del desarrollo de Fourier de una función periódica del tiempo es

$$f(t) = a_v + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sen(k\omega_0 t)]$$

de modo que

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Si la función tiene simetría par, $b_k=0$, con lo que

$$A_k = a_k \quad \varphi_k = 0^\circ$$

Ahora bien, a_k puede ser negativo. En ese caso, y para mantener el criterio de que el módulo de cada componente (A_k) sea positivo, se pasa el signo del coeficiente a la fase, con lo que

$$A_k = |a_k| \quad \varphi_k = 180^\circ$$

En funciones de simetría par se tiene

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt = \frac{4}{T_0} \left(\int_0^{T_0/4} H \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt + \int_{T_0/4}^{T_0/2} L \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) dt \right) = \\ &= \frac{4}{T_0} \frac{T_0}{2k\pi} \left\{ \left[H \sen\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) \right]_0^{T_0/4} + \left[L \sen\left(\frac{2k\pi t}{T_0}\right) \right]_{T_0/4}^{T_0/2} \right\} = \frac{2(H-L)}{k\pi} \sen\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

de donde se desprende

$$f(t) = a_v + \sum_k A_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T_0} - \varphi_k\right) \Rightarrow f(t) = \left| \begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow a_v \\ k \text{ par} \Rightarrow A_k = 0 \\ k = 1, 5, 9, \dots \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_k = \frac{2(H-L)}{k\pi} \\ \varphi_k = 0 \text{ rad} \end{array} \right. \\ k = 3, 7, 11, \dots \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_k = \frac{2(H-L)}{k\pi} \\ \varphi_k = \pi \text{ rad} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Obsérvese que, para $k=0$ y $k=\text{par}$, no se indica la fase. Ello es debido a que tal indicación carece de sentido por ser nulo el módulo de cada componente.

En las expresiones anteriores se ha utilizado la igualdad $\omega_0=2\pi/T_0$.